UOT 372.851

**Əhməd Nüsrət oğlu Məmmədov**
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
Bakı Qızlar Universitetinin dosenti,
https//orcid (0009-0004-4475-9681)

# RİYAZİ ANALİZ KURSUNDA ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN ŞƏRTİ VƏ MÜTLƏQ EKSTREMUMLARININ ÖYRƏNİLMƏSİNDƏ KONTRMİSALLARDAN İSTİFADƏ

**Ахмед Нусрат оглы Мамедов**
доктор философии по педагогике,
доцент Бакинского университета для девушек

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНТРОПРИМЕРОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ УСЛОВНЫХ И АБСОЛЮТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Ahmed Nusrat Mammadov**
doctor of philosophy in pedagogy
associate professor of Baku Girls' University

# USING COUNTEREXAMPLES IN THE STUDY OF CONDITIONAL AND ABSOLUTE EXTREMA OF A MULTIVARIABLE FUNCTION IN A MATHEMATICAL ANALYSIS COURSE

**Xülasə.** Təqdim olunan iş Ali pedaqoji məktəblərin Riyazi analiz kursunun ən fundamental bölmələrindən birinə həsr olunub: Çoxdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı. Bu bölmədə funksiyanın şərti və mütləq ekstremumlarının öyrənilməsində qurulan kontrmisallardan istifadə metodlarından bəhs olunur. Bu bölmədə teorem və təkliflərdə ekstremumların tədqiqində mütləq və şərti ekstremumları arqumentlərin əlavə şərt daxilində (rabitə tənliyini ödəməklə) ekstremumların tapılması və istiqamətdə qurulan kontrmisallar tələbələrin yaradıcılıq imkanlarının artırılmasında, yeni yaranan anlayışların düzgün dərk olunmalarında mühüm rol oynayır. Müəllif belə hesab edir ki, Riyazi analizin digər mövzularında da kontrmisallardan istifadə çox faydalıdır.
***Açar sözlər:*** *Şərti ekstremum, mütləq ekstremum, rabitə tənliyi, Laqranj funksiyası, kontrmisal*

**Резюме.** Представленная работа посвящена одному из наиболее фундаментальных разделов курса математического анализа вузов: Дифференциальному исчислению функций многих переменных. В этом разделе обсуждаются методы использования контрпримеров при исследовании условных и абсолютных экстремумов функции. В этом разделе при исследовании экстремумов в теоремах и предложениях важную роль в повышении креативности играют абсолютные и условные экстремумы аргументов, нахождение экстремумов в пределах дополнительного условия (путем удовлетворения уравнения.
***Ключевые слова:*** *условный экстремум, абсолютный экстремум, уравнение связи, функция Лагранжа, контрпример*

**Summary.** The presented work is dedicated to one of the most fundamental sections of the Mathematical analysis course of Higher Pedagogical Schools: Differential calculus of multivariable functions. In this section, methods of using counterexamples are discussed in the study of conditional and absolute extrema of the function. In this section, in the study of extremums in theorems and propositions, the absolute and conditional extremums of the arguments, finding extremums within the additional condition (by satisfying the communication equation) and counterexamples built in the direction play an important role in increasing the creativity of students and in the correct understanding of new concepts. The author believes that the use of counterexamples is very useful in other topics of mathematical analysis.
***Key words:*** *Conditional extremum, absolute extremum, communication equation, Lagrange function, counterexample*

Məlum olduğu kimi, riyazi analiz kursunda çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumlarını taparkən, yəni bu məsələ araşdırılarkən arqumentlər üzərinə heç bir əlavə şərt qoyulmurdu. Lakin elə məsələlər (tətbiqi məsələlər) var ki, orada arqumentləri əlavə şərtlərin ödənməsi halında həmin çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumlarının tapılması məsələsi ortaya çıxır.

Tutaq ki,

$u(x,y) = x^2 + y^2$ (1)

funksiyasının arqumentləri $3x + y = 1$ əlavə əlaqə (rabitə) şərtini ödəyən ekstremumunu tapmaq tələb olunur. Yəni, $u(x,y) = x^2 + y^2$ funksiyasının ekstremumunu bütün müstəvidə deyil, $3x + y = 1$ düz xətti üzərində axtarılır.

Bu məqsədlə $3x + y = 1$ tənliyindən $y$ dəyişənini tapıb (1) funksiyasında $y$-in yerinə yazaq:

$y = 1 - x$

olduğundan

$u(x, 1-3x) = x^2 + (1-3x)^2 = 10x^2 - 6x + 1$ (2)

Göründüyü kimi baxılan məsələ $u(x, 1-3x) = 10x^2 - 6x + 1$ (2) funksiyasının şərtsiz ekstremumunun tapılmasına gətirilir:

$$u'_x = 20x - 6 = 0$$

Buradan $2(10x - 3) = 0,\ x = \frac{3}{10}$ stasionar nöqtəsində $u''_{xx}$= 20 > 0 olduğundan birdəyişənli funksiyanın ekstremumunun tapılması üçün II kafi şərtə əsasən $x = \frac{3}{10}$ nöqtəsində $u(x, 1-3x)$ funksiyası minimum qiymətini alır.

$$u_{min}\left(\frac{3}{10}\right) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(1 - \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$$

Beləliklə, $u(x,y) = x^2 + y^2$ funksiyası $3x + y = 1$ əlavə əlaqə şərti daxilində $x = \frac{3}{10}, y = \frac{1}{10}$ olduğundan $M\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$ nöqtəsində $u_{min}(M) = u_{min}\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$ şərti ekstremuma malikdir.

$u(x,y) = x^2 + y^2$ funksiyası heç bir əlavə şərti ödənməməsi halında şərtsiz ekstremumunu tapaq. $du(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ buradan $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ sistemini alırıq.

Burada $\frac{\partial u}{\partial x}$ və $\frac{\partial u}{\partial y}$ ifadələri $u(x,y)$ funksiyasının uyğun olaraq x-ə və y-ə görə xüsusi törəmələridir.

Bu nöqtədə funksiyanın ekstremumunu tapaq.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\ a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\ a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Deməli (0,0) nöqtəsi verilmiş funksiyanın stasionar nöqtəsidir.

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4 - 0 = 4 > 0\ a_{11} > 0\ (a_{22} > 0)$ olduğundan, (0,0) nöqtəsində verilmiş funksiya şərtsiz minimum qiymət alar, yəni

$$u_{min}(0,0) = 0$$

şərtsiz minimumdur.

İndi isə $u = f(x,y,z)$ üçdəyişənli funksiyasına baxaq. Tutaq ki, bu funksiya diferensiallanandır və $x, y, z$ arqumentləri $\varphi(x,y,z) = 0$ (3) əlavə əlaqə şərtini ödəyir. (3) tənliyinə əlaqə tənliyi deyilir.

**Tərif.** Tutaq ki, koordinatları (3) əlaqə tənliyini ödəyən $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi verilmişdir. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında bütün $M(x,y,z)$ nöqtələri üçün $f(x,y,z) < f(x_0,y_0,z_0)$ $(f(x,y,z) > f(x_0,y_0,z_0))$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda deyirlər ki, $u = f(x,y,z)$ funksiyası $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsində şərti maksimuma (minimuma) malikdir.

Yəni $u = f(x,y,z)$ funksiyası ekstremumun bütün $R^3$ koordinat fəzasında deyil, $\varphi(x,y,z) = 0$ səthi üzərində axtarılır. Başqa sözlə, verilən funksiyanın $\varphi(x,y,z) = 0$ səthi üzərinə düşən nöqtəsinə baxılır.

$\varphi(x,y,z)$ tənliyindən $z$ dəyişənini $x$ və $y$ vasitəsilə ifadə etmək, yəni $z = \Psi(x,y)$ olarsa, $z$-in bu ifadəsini (3)-də nəzərə alsaq

$u = f(x, y, \Psi(x,y))$ (4)

mürəkkəb funksiyasını almış olarıq.

Beləliklə, $u$ funksiyasının (3) əlaqə tənliyini ödəyən ekstremumu $f(x,y,\Psi(x,y))$ mürəkkəb funksiyasının adi (şərtsiz) ekstremumu ilə eyni olacaq. Bundan əvvəlki misalda da belə etmişdik.

Bu üsul bir çox hallarda səmərəli olmur. Bəzi hallarda əlaqə tənliyində $z$-i $x$ və $y$ vasitəsi ilə tapmaq olmur. Məsələn, $xyz - \ln(xy) - e^z = 0$ tənliyində $z$-i tapmaq çətinlik yaradır.

Məhz elə bu səbəbdən şərti ekstremumu Laqranjın təklif etdiyi üsulla tapmaq asan olur. Sadəlik xatirinə bu üsulla üçdəyişənli funksiya halı üçün verək. Tutaq ki, $u = f(x, y, z)$ funksiyası və $\varphi(x, y, z) = 0$ (3) əlavə əlaqə şərti verilib. Bu əlavə şərt daxilində üçdəyişənli funksiyanın ekstremumunun (şərti ekstremumu) tapılması məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, verilmiş funksiyanın hər hansı $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində ekstremumu var. Tutaq ki, $\varphi(x, y, z) = 0$ tənliyi $z$ funksiyasını $x$ və $y$-in qeyri-aşkar funksiyası kimi təyin edir. Qeyd etdiyimiz kimi $u = f(x, y, \Psi(x, y))$ mürəkkəb funksiyasının şərtsiz ekstremumu var. Onda zəruri şərtə əsasən həmin nöqtədə onun tam diferensialı sıfıra bərabər olar, yəni

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} dz = 0 \ (5)$$

burada $dx, dy, x$ və $y$ dəyişənlərinin artımı, $dz$ isə $z = \Psi(x, y)$ funksiyasının tam diferensiallıdır.

(3)-də $z$-in əvəzinə $\Psi(x, y)$ yazsaq, onda (3) tənliyi $x$ və $y$-ə nəzərən eynilik, yəni

$\varphi(x, y, \Psi(x, y)) = 0$ (6)

olar.

Sonuncu bərabərliyin sol tərəfinin tam diferensialı $x = x_0, y = y_0$ olduqda sıfıra bərabər olur:

$$\frac{\partial \varphi(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} dz = 0 \ (7)$$

(7)-in hər tərəfini hər hansı $\lambda \in R$ həqiqi ədədinə vuraq, (5)-lə tərəf-tərəfə toplasaq:

$$(f'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0, z_0))dx + \left(f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0, z_0)\right) dy + \left(f'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda \varphi'_z(x_0, y_0, z_0)\right)dz = 0 \ (8)$$

Burada λ ədədini elə seçək ki, $dz$-in qarşısında vuruq sıfıra bərabər olsun. Yəni

$f'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda \varphi'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$

Onda (8) bərabərliyində

$f'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0, z_0) = 0$ (9)

$f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ (10)

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsinin koordinatları $\varphi(x, y, z) = 0$ əlaqə tənliyini ödədiyindən $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ (11) (Ona görə də (9), (10), (11) bərabərliklərindən $x_0$, $y_0, z_0$ və $\lambda$ kəmiyyətlərini tapa bilərik).

Sonuncu bərabərliklər onu göstərir ki, $x_0$, $y_0, z_0$ və $\lambda$ kəmiyyətlərinin tapılması üçün

$\phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$ (12)

funksiyasını düzəltməklə (buna Laqranj funksiyası deyilir) $\phi(x, y, z)$ funksiyası $x, y$ və $z$ dəyişənlərinə nəzərən xüsusi törəmələrini sıfıra bərabər etmək və onlara $\varphi(x, y, z) = 0$ əlaqə tənliyini əlavə edib alınan

$$\begin{cases} \phi'_x(x, y, z) = 0 \\ \phi'_y(x, y, z) = 0 \\ \phi'_z(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \ (13)$$

sistemini həll etmək lazımdır. Bu sistemdən elə $x, y$ və $z$ nöqtəsini tapmaq olar ki, bunlar da verilən funksiyanın şərti ekstremumu olar.

Əvvəlcədən $\phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$ funksiyası götürməklə $x, y$ və $z$-ə nəzərən xüsusi törəmələri tapaq. (13) sistemini qurub həll etsək, onda belə sual yaranar: Bu funksiyaya nə ehtiyac var. Haradan bu funksiyanın qurulmasına ehtiyac yaranır? Və s.

Qeyd edək ki, bu üsul istənilən sayda ($n > 3$) dəyişənindən asılı funksiyalar üçün də tətbiq oluna bilər.

Şərti ekstremumun varlığı və onun xarakteri Laqranj funksiyasının ikinci tərtib diferensialının yəni, $d^2\phi$-in işarəsindən asılıdır. $d^2\phi > 0$ olarsa, $(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində verilən funksiya şərti minimum, $d^2\phi < 0$ olarsa, $(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində verilən funksiya şərti maksimum qiymətini alır, burada

$$d^2\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz\right)^2 \phi$$

Sadəlik xatirinə ikidəyişənli funksiya halına baxaq: $u = f(x, y)$ (1) $\varphi(x, y) = 0$ (3) əlaqə tənliyini ödəyən ekstremumu tapmaq üçün Laqranj funksiyası

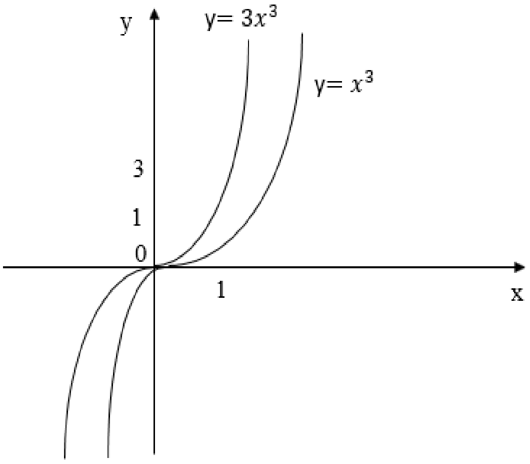
$\phi(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ qurulur.

$$\begin{cases} \phi'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \phi'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \ (15)$$

zəruri şərti ödənir.

Tutaq ki, (15) sisteminin həllərindən biri $x_0$, $y_0$ və $\lambda$ ədədləridir. Onda $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi $u = f(x, y)$ funksiyası şərti ekstremum üçün stasionar nöqtə olar. Həmin nöqtədə funksiya ekstremum (şərti) qiymət ala da bilər, almaya da bilər. Bunu yoxlamaq üçün ya $d^2\phi$-in işarəsini yoxlamaq ($d^2\phi > 0$ olduqda şərti minimum, $d^2\phi < 0$ olduqda şərti maksimum) lazımdır, yaxud aşağıdakı kafi şərtə əsasən araşdırmaq olar:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & \phi''_{xx}(x_0, y_0) & \phi''_{xy}(x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & \phi''_{xy}(x_0, y_0) & \phi''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$




Bu determinant müsbətdirsə, yəni $\Delta > 0$ isə $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi şərti minimuma, determinant mənfidirsə, yəni $\Delta < 0$ isə $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində funksiya şərti maksimuma malikdir.

Fərz edək ki, $D$ oblastında təyin olunmuş $n$ dəyişənli $f(x_1, x_2, \dots . x_n)$ funksiyası $\varphi_i(x_1, x_2, \dots . x_n) = 0, i = 1,2, \dots . k$ əlaqə tənliklərini ödəyir (Məsələn, $\varphi_1(x_1, x_2, \dots . x_n) = 0$, $\varphi_2(x_1, x_2, \dots . x_n) = 0$, $\varphi_k(x_1, x_2, \dots . x_n) = 0$, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0) \in D$). D oblastı qapalı oblastdır.

$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ nöqtəsi əlaqə tənliyini ödəyir və $f(x_1, \dots . x_n)$ funksiyasının şərti ekstremumudur.

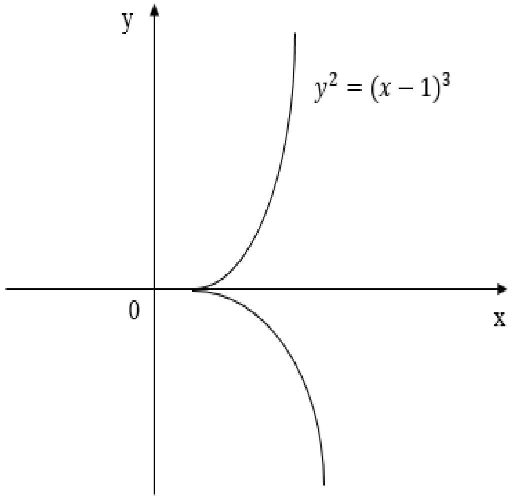
Aşağıdakı iki təklif əsasında bu məsələ həll olunur:

1. $f(x_1, x_2, \dots . x_n)$ və $\varphi_i(x_1, x_2, \dots . x_n) = 0, i = 1,2, \dots . k$ funksiyası $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməz xüsusi törəmələri var (bütün arqumentlərə nəzərən).

2. $\left\|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right\|$ matrisinin $i = 1,2, \dots . k, j = 1,2, \dots . n, M_0$ nöqtəsində ranqı k-ya bərabərdir, yəni $M_0$ nöqtəsində bu matrisin elementlərindən düzəldilmiş k tərtibli determinantlardan heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir.

Qeyd edək ki, Laqranjın təklif etdiyi üsul (şərti ekstremum) üçün I və II şərtlərin hər ikisi eyni zamanda ödənməlidir. Onlardan biri ödənmədikdə ekstremumun varlığı haqqında heç nə demək olmur.

Aşağıdakı misallara baxaq.




**Misal 1.** Koordinat başlanğıcından $y^2 = (x-1)^3$ kubik parabolasına qədər ən qısa məsafəni, başqa sözlə, $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyasının $\varphi(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$ şərtini ödəyən minimumunu tapaq.

Həndəsi olaraq aydındır ki, $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyası kubik parabola üzərində yerləşən $M(1,0)$ nöqtəsində minimum qiymət alır.

Lakin Laqranj üsulu ilə bu nöqtəni tapmaq olmur.

Belə ki, $\varphi'_x(x_0, y_0) = \varphi'_x(1,0) = \varphi'_y(1,0) = 0$ bununla da II şərt ödənmir. Ona görə də şərti ekstremumun tapılması üçün Laqranj üsulunu bu halda tətbiq etmək olmur. Bunu nəzərə almadan

$$\phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda((x-1)^3 - y^2)$$

$$\begin{cases} \phi'_x(x, y) = 2x + 3\lambda(x-1)^2 = 0 \\ \phi'_y(x, y) = 2y - 2\lambda y = 0 \\ \varphi(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Burada $x = 1$ olduqda birinci bərabərlik ödənmir.

Lakin yuxarıda qeyd olunduğu kimi $M(1,0)$ nöqtəsində $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyasının $y^2 - (x-1)^3 = 0$ tənliyini ödəyən ekstremumu (minimum) var.

**Misal 2.** $f(x, y) = (y - x^3)(y - 3x^3)$ funksiyası bütün həqiqi oxda təyin olunub kəsilməz diferensiallanandır. Funksiyanın sıfırları: $y = x^3, y = 3x^3$

Bu əyrilər arasında verilən funksiya mənfi, onların xaricində isə müsbətdir.

Belə ki, $f(0,0) = 0$ $(0,0)$ nöqtəsinin ətrafında funksiya mənfi və müsbət qiymətlər alır. Ona görə də $(0,0)$ nöqtəsində $(OX)$ oxuna toxunur. Bu nöqtədən keçən hər hansı düz xətt ((0,0) nöqtəsinin ətrafında) üzərində funksiya müsbətdir. Ona görə də (0,0) nöqtəsindən keçən hər hansı düz xətt üzərində funksiyanın ciddi minimumu var.

**Misal 3.** $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$ funksiyasının (0,0) nöqtəsində bu nöqtədən keçən hər hansı düz xətt üzərində minimumu var və $f_{min}=0$ . Buna baxmayaraq verilmiş funksiyanın (0,0) nöqtəsində ekstremumu yoxdur. Doğurdan da, (0,0) nöqtəsində funksiya artır.

$$\Delta f(0,0)=2\Delta x^2-3\Delta x\Delta y^2+\Delta y^4$$
$$=\left(\Delta y^2-\frac{3\Delta x}{2}\right)^2-\frac{\Delta x^2}{4}.$$

$\Delta x=6t^2, \Delta y=3t\ (t>0)$ və $\Delta x=0, \Delta y>0$ olduqda müxtəlif işarəlidir.

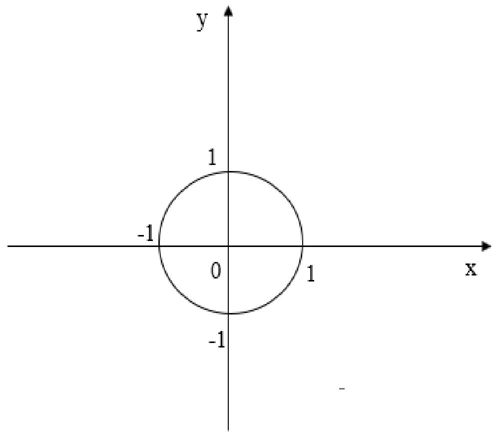
Ona görə də $f(x,y)$ funksiyası $M_0(x_0,y_0)$ nöqtəsində hər hansı düz xətt boyunca ekstremum qiymət alması, məsələn minimum qiymət alması funksiyanın həmin nöqtədə minimum qiymət alması üçün kafi deyil.

İndi isə mütləq ekstremum barədə.

Fərz edək ki, $f(x_1,x_2,\ldots.x_n)$ funksiyası qapalı məhdud $D$ oblastında təyin olunub və bu oblastda onun xüsusi törəmələri sonludur. $f(x_1,x_2,\ldots.x_n)$ funksiyasının bu oblastda ən böyük (ən kiçik) qiymətini tapmaq üçün onun bu oblastın daxilində bütün stasionar nöqtələrini tapmaq və bu nöqtələrdə funksiyanın qiymətləri ilə funksiyanın $D$ oblastındakı sərhədlərindəki ən böyük (ən kiçik) qiymətləri ilə müqayisə edib, bu qiymətlərdən ən böyüyü bu funksiyanın həmin $D$ oblastında ən böyük, ən kiçiyi isə onun bu oblastda ən kiçik qiyməti olar.

Elə funksiyalar göstərmək olar ki, bu qaydanı mütləq ekstremumun tapılması üçün tətbiq etmək olmaz.

**Misal 4.** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyası qapalı, məhdud $D: x^2+y^2\leq 1$ dairəsində təyin olunub, $M_0(0,0)$ nöqtəsində xüsusi törəmələri yoxdur. Doğurdan da, $(ox)$ oxu üzərində $y=0, z(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$bu funksiyanın isə $x=0$ nöqtəsində törəməsi yoxdur. Ona görə də (0,0)-da $z'_x$ yoxdur. Həmçinin göstərmək olar ki, $M_0(0,0)$ nöqtəsində $z'_y$ yoxdur. Buna baxmayaraq, bu nöqtədə funksiyanın ciddi minimumu var.




**Misal 5.** $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ funksiyası $D: x^2+y^2\leq 1$ qapalı məhdud oblastda (0,0) nöqtəsində sonsuz xüsusi törəməsi var. Bu funksiyaya $(ox)$ oxu üzərində, yəni $y=0$ düz xəttində baxsaq $f(x,0)=\sqrt[3]{x^2}$,

$f'_x(x,0)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ (0,0)-da $f'_x(0,0)=\infty$,

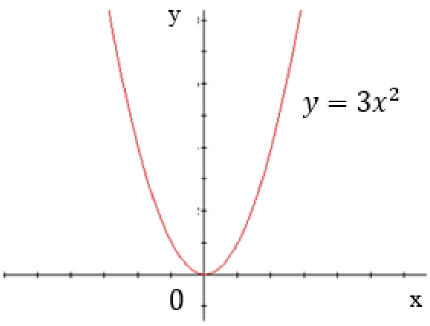
həmçinin $(oy)$ oxu üzərində $x=0$ olduğundan $f(0,y)=\sqrt[3]{y^2}$, $f'_y(0,y)=\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ (0,0) nöqtəsində $f'_y(0,0)=\infty$.

Lakin funksiyanın (0,0) nöqtəsində minimumu var (həmçinin göstərmək olar ki, (0,0) nöqtəsində verilən funksiyanın ciddi minimumu var).

**Misal 6.** Göstərin ki, $z=(y-x^3)(y-3x^3)$ funksiyası $(OXY)$ müstəvisi üzərində özünün ən kiçik və ən böyük qiymətini almır. Lakin bu funksiya müstəvinin koordinat başlanğıcından keçən istənilən düz xətti üzərində özünün ən kiçik qiymətini alır.

$f(x,y)=(y-x^3)(y-3x^3)$ funksiyasının (0,0) nöqtəsində lokal ekstremumu yoxdur. (0,0) nöqtəsinin ixtiyari ətrafında $(0,c)$ kimi nöqtələri var.

$f(0,c)=c^2>0$. Məsələn, $(b,2b^2)$ nöqtəsində isə $(b\neq 0)$ (bu nöqtədə (0,0) ətrafında) funksiya$f(b,2b^2)=(2b^2-b^2)(2b^2-3b^2)=b^2\cdot(-b^2)=-b^4<0$.




$f(x,y)$ funksiyasına $(ox)$ oxu üzərində baxsaq, $y = 0$ götürsək: $y = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ nöqtəsində mütləq minimumu var.

$(oy)$ oxu üzərində baxsaq, $x = 0$ götürsək:

$f(x,y) = y^2 > 0$. $y = 0$ -da mütləq minimum olar.

Nəhayət, $y = m \cdot x$ düz xətti üzərində baxsaq (koordinat başlanğıcından keçən) $0 < |m| < +\infty$.

Onda $f(x,mx) = g(x) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$
$f'(x,mx) = 2m^2x - 12mx^2 + 12x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

Və $g'(0) = 0, g''(0) = 2m^2 > 0$ olduğundan ikinci kafi şərtə görə, $g(x)$ funksiyasının $x_0 = 0$ nöqtəsində minimumu var.

Təcrübələr onu qeyd etməyə imkan verir ki, təlim prosesində lazım gəldikcə kontrmisallardan istifadə olunduqda, bu tələbələrin yaradıcılıq imkanlarının artırılması, onlarda Riyazi analizə olan maraqların yüksəldilməsində və təlimin səmərəliliyinin artırılması baxımından faydalıdır.

**Problemin aktuallığı.** Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumunun tapılması məsələsi Riyazi analiz kursunda tətbiq nöqteyi-nəzərindən ən aktual mövzulardan biridir. Lakin elə tətbiqi məsələlər var ki, orada arqumentlərin əlavə olaraq müəyyən şərtləri ödəməsi halında funksiyanın ekstremumlarının tapılması məsələsi diqqəti cəlb edir. Bu istiqamətdə praktik məsələlərin həllində kontrmisallar əhəmiyyətli rol oynayır.

Məqalədə qurulmuş kontrmisallar bu baxımdan əhəmiyyət kəsb edir ki, Laqranjın təklif etdiyi üsul I və II şərtlərin (bu şərtlər məqalədə qeyd olunub) hər ikisinin eyni zamanda ödəndiyi hallarda tətbiq olunur. Onlardan biri ödəmədikdə şərti ekstremumun varlığı haqqında heç nə demək olmur.

Qurulan kontrmisallar təlimin səmərəliliyinin artırılmasında tələbələrdə yeni anlayışların formalaşmalarında çox əhəmiyyətlidir.

**Problemin elmi yeniliyi.** Təlim prosesində kontrmisallardan riyazi analizə dair bilik və bacarıqların inkişaf etdirilməsində müəyyən təkliflərin tərsinin doğru olmadığını, təkliflərdəki şərtlərin birinin ödənmədiyi, yaxud digər şərtlərlə əvəz edildikdə hökmün doğru olmadığını göstərmək lazım gəldikdə istifadə olunur. Bu da təlim prosesinin faydalı sonluqla nəticələnməsi baxımından anlayışların mənalarının düzgün açılması baxımından əhəmiyyətlidir. Göstərilən istiqamətdə konkret nümunələr göstərməklə yeni təklifləri ümumi halda isbat etməyə ehtiyac qalmır.

**Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi.** Ali pedaqoji məktəblərin Riyazi analiz kursunda təlim prosesində kontrmisallardan istifadə ideyası bir çox məqsəd daşıyır. Riyazi analiz kursunda kontrmisallardan istifadə olunduqda yaranan yeni anlayışlar düzgün mənimsənilir, tələbələrin müstəqil düşünmək qabiliyyətləri inkişaf edir, fənnə olan maraqları artır. Və digər mövzularda da belə misalların qurulmasına həvəs və maraq artır ki, bu da gələcək Riyaziyyat müəllimlərinin formalaşmasında, təhsilin digər pillələrində təhsillərini davam etdirmələrində mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

## Ədəbiyyat:

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – Москва, 1970.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа т.2. / Л.Д. Кудрявцев – Москва, 1981.
3. Гельбаум, Б. Контрпримеы в анализе. / Б. Гельбаум, Дж. Олмстед. – Москва: “Мир” – 1967.
4. Musayev V.M. Çoxdəyişənli funksiyanın diferensial və inteqral hesabı. – Bakı, 2009.
5. Demidoviç, B.P. Riyazi analizdən məsələ və misallar. / B.P. Demidoviç – Bakı, 2003.
6. Davıdov, N.A. Riyazi analizdən məsələlər. / N.A. Davıdov, P.P. Korovkin, V.N. Nikolski. – Bakı, 2010.

**E-mail:** ehmedmammedov1962@gmail.com
**Rəyçilər:** *ped.elm.dok. prof.* **H.H. Əhmədov,**
*riy.ü.fəls.dok. dos.* **R.H. Şirinov**
**Redaksiyaya daxil olub:** 12.12.2023