UOT 372.851

Əhməd Nüsrət oğlu Məmmədov
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
Bakı Qızlar Universitetinin dosenti,

RİYAZİ ANALİZ KURSUNUN "FUNKSİONAL ARDICILLIQLAR VƏ FUNKSİONAL SIRALAR" BÖLMƏSİNDƏ KONTRMİSALLARDAN İSTİFADƏ METODLARI

Ахмед Нусрат оглы Мамедов
доктор философии по педагогике,
доцент Бакинского Университета для Девушек

МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНТРПРИМЕРОВ В РАЗДЕЛЕ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ» КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ahmed Nusrat Mammadov
doctor of philosophy in pedagogy
associate professor of Baku Girls' University

METHODS OF USING COUNTEREXAMPLES IN THE "FUNCTIONAL SEQUENCES AND FUNCTIONAL SERIES" SECTION OF THE MATHEMATICAL ANALYSIS COURSE

Xülasə. Təqdim olunan iş Riyazi analiz kursunun "Funksional ardıcıllıqlar və funksional sıralar" bölməsinin tədrisi problemlərinə həsr olunub. Həmin bölmədə kontrmisallardan istifadə metodları tədqiq olunur. Ümumiyyətlə, kontrmisallar bu və ya digər riyazi təklifin tərsini, yaxud həmin təkliflərdəki şərtlərin nə dərəcədə zəruri və ya kafi olduğunu nümayiş etdirməkdə yaxud hər hansı təklifin doğruluğunu inkar edən zaman istifadə olunur. Kontrmisallar nəzərdə tutulan bölmədə bir çox əsas anlayışların mənimsənilməsində, təlimin səmərəliliyinin yüksəldilməsində, tələbələrin yaradıcılıq qabiliyyətlərinin inkişafında mühüm və əvəzsiz rol oynayır. Müəllif belə hesab edir ki, digər riyazi fənlərin təlimində də kontrmisallardan istifadə əhəmiyyətlidir.

Açar sözlər: *funksional ardıcıllıq, funksional sıra, limit funksiyası, müntəzəm yığılma, majorant sıra, kontrmisal*

Резюме. Представленная работа посвящена учебно-методическим задачам раздела «Функциональные последовательности и функциональные ряды» курса математического анализа, в котором изучаются приемы использования контрпримеров,как правило, контрпримеры применяются для демонстрации того, насколько необходимо или достаточно обратное того или иного математического суждения или условия в этих суждениях и они используются при отрицании истинности какого-либо предложения. Контрпримеры играют важную и незаменимую роль в усвоении многих основных понятий в намеченном разделе, повышении эффективности обучения, выработке творческих способностей студенты Автор считает, что использование контрпримеров важно и при обучении другим математическим предметам.

Ключевые слова: *функциональная последовательность, функциональный ряд, предельная функция, равномерная сходимость, мажорантный ряд, контрпример*

Summary. The presented work is dedicated to the teaching problems of the "Functional sequences and functional series" section of the Mathematical analysis course. In that section, the methods of using counterexamples are studied.

Generally, counterexamples are used to demonstrate how necessary or sufficient the converse of this or that mathematical proposition or the conditions in those propositions are. Or is used when denying the truth of any proposal. Counterexamples play an important and indispensable role in mastering many basic concepts

in the intended section, increasing the efficiency of training, and developing students' creative abilities. The author believes that the use of counterexamples is also important in teaching other mathematical subjects.

***Key words**: functional sequence, functional series, limit function, regular accumulation, majorant series, contra-examples*

Ali pedaqoji məktəblərdə Riyazi analiz kursunun təlimində əsas məqsədlərdən biri nəzəri materialların mənimsənilməsi, əsas anlayışların möhkəmləndirilməsi və praktikada ondan necə istifadə olunması, tələbələrin yaradıcılıq imkanlarının inkişafı və beləliklə də fənnə marağın artırılmasıdır. Qeyd edək ki, digər riyazi elmlər kimi, Riyazi analiz fənninin tədrisi prosesində mühazirə materiallarının tələbələrə çatdırılması istiqamətində teorem və digər riyazi təkliflərdəki şərt və nəticələr (hökmlər) geniş şəkildə təhlil olunmalı həmin şərtlərin nə dərəcədə zəruri olduqları tələbələrin diqqətinə yönəldilməli və nümunələr vasitəsi ilə möhkəmləndirilməlidir. Bu xüsusilə Pedaqoji Ali məktəblərin "Riyaziyyat" və həmçinin "Riyaziyyat və informatika müəllimliyi" ixtisasında bakalavriat təhsili alan tələbələr üçün daha aktuallıq kəsb edir.

Riyazi analizin tədrisi prosesində bir çox üsul və vasitələr vardır ki, onlardan səmərəli istifadə olunduqda tələbələrin fəallığı yüksəlir və fənnə olan maraq və qabiliyyətləri inkişaf edir. Təqdim olunan işdə Riyazi analiz kursunun "Funksional ardıcıllıqlar və funksional sıralar" bölməsinin mənimsənilməsində kontrmisallardan istifadənin nə kimi əhəmiyyət daşıdığından bəhs olunur.

Hal-hazırda qeyd etdiyimiz ixtisaslarda "Riyazi analiz-2" proqramında (bakalavriat pilləsində) həmin bölmə tədris olunur. Əvvəlcə funksional ardıcıllığa tərif verilir:

Tərif 1. Hədləri hər hansı $E \subset R$ çoxluğunda təyin olunmuş $\{f_n(x)\}$ və ya

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x), f_n(x), \dots (1)$$

şəklində olan ardıcıllığa funksional ardıcıllıq deyilir.

Və ardıcıllıq olaraq qeyd edilir ki, arqumentin (x dəyişəninin) konkret x_0 qiymətində bu ardıcıllıq ədədi ardıcıllığa çevrilir. Yəni

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_{n-1}(x_0), f_n(x_0), \dots (2)$$

ədədi ardıcıllıq olur.

Əgər bu ardıcıllıq yığılan olarsa, (1) ardıcıllığı $x_0 \in E$ nöqtəsində yığılan, əks halda isə dağılandır.

Qeyd edək ki, əgər E çoxluğunun hər bir nöqtəsində (1) ardıcıllığı yığılandırsa, onda bu ardıcıllıq E çoxluğunda yığılandır.

Bundan sonra limit funksiyası anlayışı daxil edilir.

Tərif 2. E çoxluğunda yığılan $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının E-nin hər bir nöqtəsində sonlu

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

limiti var. f(x) funksiyasına (1) ardıcıllığının limit funksiyası deyilir.

Bu tərifi aşağıdakı kimi də vermək olar:

Tərif 3. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə elə N=N (ε, x) ədədi varsa, n$\geq N(\varepsilon, x)$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$(3)

bərabərsizliyi bütün $x \in E$ nöqtələri üçün ödənir. Onda deyirlər ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığı E çoxluğunda f(x) funksiyasına yığılır.

F(x)-ə $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının limit funksiyası deyilir.

Bu tərifi kvantorların köməyi ilə qısa şəkildə belə vermək olar:

$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N = N(\varepsilon, x))$(n$\geq N(\varepsilon, x)$($\forall x \in E)$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olarsa, deyirlər ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı E-də f(x) -ə yığılır.

Burada, təbii ki, belə bir sual yaranır: verilmiş E çoxluğunun hər bir nöqtəsi üçün yalnız ε −dan asılı olan elə N(ε) ədədi varmı ki, n$\geq$ N(ε) şərtini ödəyən bütün n-lər üçün (3) bərabərsizliyi ödənsin? Belə hal mümkündür. Onda deyirlər ki, (1) ardıcıllığı E-də f(x) funksiyasına müntəzəm yığılır.

Beləliklə, aşağıdakı tərifi tələbələrin diqqətinə çatdırmaq olar:

Tərif 4. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N=N(ε) ədədi varsa ki, n≥ N(ε) şərtini ödəyən bütün n-lər və E-nin hər bir nöqtəsi üçün (3) bərabərsizliyi ödənir. Onda deyirlər ki, (1) ardıcıllığı E çoxluğunda f(x) -ə müntəzəm yığılır.

Bu fakt $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ (n→ ∞,x∈ E) şəklində işarə olunur: (yaxud $f_n \overrightarrow{{}_E} f$, $\forall x\epsilon E$)

Bu tərifi də qısa kvantorların köməyi ilə belə ifadə etmək olar:

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon))(\forall n \geq N)(\forall x\epsilon E), |f$

ödənirsə, onda deyirlər ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı f(x)-ə müntəzəm yığılır.

Aşağıdakı teoremi nəzərdən keçirək:

Teorem 1. Əgər $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığı E-də müntəzəm yığılandırsa, həmin ardıcıllıq E-nın hər bir nöqtəsində yığılandır.

Burada belə bir sual yaranır. Bu teoremin tərsi də həmişə doğrudurmu? Yəni hər hansı çoxluqda yığılan funksional ardıcıllıq, həmin çoxluqda müntəzəm yığılan ola bilərmi?

Suala cavab vermək üçün aşağıdakı nümunəyə baxaq.

Misal 1. $f_n(x) = x^{2n}$ olsun n=1,2,3,...

Bu funksional ardıcıllığı açıq şəkildə yazaq:

$$x^2, x^4, x^6, ..., x^{2n-1}, x^{2n}, ... \quad (4)$$

Bu ardıcıllıq E=$[-1;1]$ parçasında yığılır və

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{Bmatrix} 0, \text{əgər } -1 < x < 1 \\ 1, \text{əgər } x = \pm 1 \end{Bmatrix}$$

Həmçinin, göründüyü kimi, f(x) funksiyası E çoxluğuna daxil olan -1 və 1 nöqtələrində kəsiləndir. Lakin (4) ardıcıllığı $[-1;1]$ -də müntəzəm yığılan deyil.

Bunu göstərmək üçün əksini fərz edək. Yəni, tutaq ki, (4) ardıcıllığı $[-1;1]$ parçasında müntəzəm yığılandır. Başqa sözlə desək, tərifə əsasən istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə N=N(ε) ədədi varsa, n≥ N(ε) bərabərsizliyini ödəyən bütün n-lər və $[-1;1]$ parçasının hər bir x nöqtəsi üçün

$|f_n(x) - f(x)| = |x^{2n} - f(x)| < \varepsilon$

ödənir. n-i qeyd etsək və

$x_0 = \sqrt[2n]{2\varepsilon} \in [-1;1]$ götürsək

$(\varepsilon < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\varepsilon < 1, x_0^{2n} = 2\varepsilon < 1)$

$|x_0^{2n} - f(x_0)| < \varepsilon x_0 \in (0,1)$ olduğu üçün $f(x_0) = 0$ olur. Sonuncu bərabərsizlikdən

$\varepsilon > |x_0^{2n} - f(x_0)| = x_0^{2n} = 2\varepsilon > \varepsilon$. Bu isə ola bilməz. Yəni fərziyyəmiz doğru deyil. Başqa sözlə desək, (4) ardıcıllığı E=$[-1;1]$ çoxluğunda müntəzəm yığılan deyil.

Yeri gəlmişkən, burada funksional ardıcıllığın qeyri müntəzəm yığılmasının tərifini də tələbələrə izah etmək olar.

Tərif 5. Elə $\varepsilon > 0$ ədədi varsa, istənilən k $\in N$ n≥ k şərtini ödəyən elə n-lər varsa, x∈ E üçün $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ ödənir. Onda deyirlər ki, $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığı E-də f(x)-ə qeyri-müntəzəm yığılır (yaxud, müntəzəm yığılmır).

Bundan sonra funksional ardıcıllığın müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərti vermək olar.

Teorem 2. $\{f_n(x)\}$, n=1,2,3,... funksional ardıcıllığının f(x) funksiyasına müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\lim_{n\to\infty} sup|f(x) - f_n(x)| = 0 \quad (5)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

Yaxud:

Teorem 3. (Koşi meyarı). $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığının hər hansı E çoxluğunda müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt hər bir x∈ E üçün istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $N_0(\varepsilon) \in N$ ədədinin varlığıdır ki, n $\geq N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün n-lər və istənilən p $\in N$ üçün

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

bərabərsizliyinin (Koşi şərtinin) ödənilməsidir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, burada da $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığının qeyri-müntəzəm yığılan olmasını, yəni müntəzəm yığılma üçün Koşi şərtinin inkarını söyləmək (vermək) tələbələr üçün maraq yaradır. Onu belə ifadə edək:

Teorem 3. $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığının hər hansı E çoxluğunda qeyri-müntəzəm (müntəzəm yığılmayan) olması üçün zəruri və kafi şərt elə $\bar{x}\ \epsilon E$ nöqtələrinin və $\varepsilon_0 > 0$ ədədinin varlığıdır ki, istənilən kϵN üçün n≥ k bərabərsizliyini ödəyən elə n və elə pϵN var ki , həmin n və p – lər üçün

$$|f_{n+p}(\bar{x}) - f_n(\overline{x})| \geq \varepsilon_0$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir.

Kvantorların köməyi ilə sonuncu zəruri və kafi şərti belə ifadə etmək olar:

$(\exists\varepsilon_0 > 0)(\forall k\epsilon N)(\exists n \geq k)(\exists P \in N)(\exists \bar{x} \in$

ödənilməsi $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının E çoxluğunda qeyri-müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafidir.

Qeyd edək ki, hər hansı E çoxluğunda $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının müntəzəm yığılan olmasına dair kifayət qədər nümunələr(misallar) göstərmək olur.

Daha bir misalı nəzərdən keçirək.

Misal 2. $f_n(x) = x^n$, E=$\{x : 0 \leq x \leq 1\}$ götürək. Əgər $x\epsilon[0,1)$ olarsa,

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

x=1 olduqda

$f_n(x) = x^n = 1$

Ona görə də $\{x^n\}$ ardıcıllığı üçün $[0,1]$ çoxluğunda

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{əgər } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{əgər } x = 1 \end{cases}$ limit funksiyasıdır.

Lakin $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı f(x)=0 limit funksiyasına qeyri-müntəzəm yığılır.

$\operatorname{Lim}\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $x\epsilon[0,1)$

Göstərmək olar ki , $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığı bu halda f(x)-ə müntəzəm yığılmır

Onu isbat etmək üçün əvvəlcə aşağıdakı teoremi yada salaq:

Teorem 4. E çoxluğunda verilmiş $\{f_n(x)\}$ funksional ardıcıllığının hər hansı f(x) funksiyasına qeyri-müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərt elə $\varepsilon_0 > 0$ ədədi və elə N(ε) ədədinin varlığıdır ki, n≥ $N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $\{x_n\}\epsilon E$ ardıcıllığı üçün

$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$(6)

bərabərsizliyi ödənməsin.

Bu teoremə əsasən $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının verilmiş çoxluqda yığılan olmadığını göstərək:

$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \in [0,1)$,$\forall n \in$ N,

Onda $|f_n(x_n) - f(x_n)| = x_n^n = \frac{1}{3} = \varepsilon_0$

Yəni: $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \varepsilon_0$ olur.

Deməli, $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı f(x)=0 limit funksiyasına müntəzəm yığılan deyil.

Aşağıdakı misala baxaq.

Misal 3. $f_n(x) = \ln\left(2 + \frac{n^2 e^x}{n^4 e^{2x}}\right)$, x∈ $[0,+\infty]$.

Bu funksional ardıcıllıq f(x)=ln2 funksiyasına (sabit funksiya) yığılır:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ln2$

Lakin verilən ardıcıllıq $f(x) = ln2$

limit funksiyasına müntəzəm yığılan deyil ,($[0,+\infty]$ - da).

Doğrudan da , $x_n = 2lnn$ götürsək,

$f_n(x_n) - f(x_n) = \ln\left(2 + \frac{n^4}{2n^4}\right) - ln2 = ln\frac{5}{4}$

olar.

Yəni, istənilən nϵN üçün

$f_n(x_n) - f(x_n) = ln\frac{5}{4}$

$\varepsilon_0 = ln\frac{5}{4}$götürsək, $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı f(x)=ln2 funksiyasına $[0,+\infty]$ - da yığılandır, lakin müntəzəm yığılan deyil.

"Funksional ardıcıllıqlar" mövzusunda aşağıdakı teorem də xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Teorem 5. $\{f_n(x)\}$ n=1,2,3... ardıcıllığının hər bir həddi $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, yığılan funksional ardıcıllıqdır. Və f(x) limit funksiyasına müntəzəm yığılır. $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının bütün hədləri $[a,b]$ parşasında inteqrallanandırsa, onda f(x) limit funksiyası da bu parçada inteqrallanan olar və

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b(\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \int_a^b f(x)dx$$

bərabərliyi (inteqral işarəsi altında limitə keçmə) doğrudur.

Teoremin şərtindən kəsilməzlik şərti ödənilməzsə, onda teorem doğru olmaz.

Aşağıdakı kontrmisalı nəzərdən keçirək:

Misal 4. $f_n(x) = x^n \cdot n^2$ (1-x) , x∈ $[0,1]$ funksional asılılığı üçün

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,$x \in (0,1)$

Doğrudan da

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2x^2(1-x) = (1-x)\lim_{n\to\infty} n^2x^2 = (1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(\frac{1}{x})^2}$$

$$= (1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\left(\frac{1}{x}\right)^n\cdot ln\frac{1}{x}} = 0 \quad (\text{Lopital} - \text{Bernulli qaydalarına görə})$$

Yəni, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x^2(1-x)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$$

Yəni , $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)$ dx = 1

$$\text{Lakin}\quad \int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_0^1 0dx = 0 \neq 1$$

Hər hansı $[a,b]$ parçasında müntəzəm yığılmayan ardıcıllıqlar üçün də

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

bərabərliyinin doğru olduğunu kontrmisallarla göstərmək olar.

Aşadakı teoremə baxaq.

Teorem 6. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional sıra hər hansı E çoxluğunda müntəzəm yığılandırsa,

Həmin sıra E çoxluğunun hər bir nöqtəsində, yəni E-də yığılandır.

Təbii ki, burada da aşağıdakı sual yaranır:

Əgər $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional sırası hər hansı sıra E çoxluğunda müntəzəm yığıla bilərmi?

Misal 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n} - x^{2n-2})$ sırasına baxaq.

Bu sıranı açıq şəkildə yazaq :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n} - x^{2n-2}) = x^2 + (x^4 - x^2) + \cdots + (x^{2n} - x^{2n-2}) + \cdots$$

Bu sıranın n- ci xüsusi cəmi

$$S_n = x^2 + (x^4 - x^2) + \cdots + (x^{2n} - x^{2n-2}) = \sum_{k=2}^{n}(x^{2k} - x^{2k-2}) + x^2$$

Sıranın cəmi

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}(x^{2k} - x^{2k-2}) + x^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, -1 < x < 1 \ olduqda \\ 1, x = \pm 1 \ olduqda \end{cases}$$

Yəni x∈(-1,1) olduqda verilən sıranın cəmi S(x)=0, x=±1 olduqda isə sıranın cəmi 1-ə bərabərdir. Lakin verilən sıra $[-1{,}1]$ parçasında müntəzəm yığılan deyil.

$S_n(x) = x^{2n}$ ardıcıllığının $[-1{,}1]$ parçasında müntəzəm yığılan olmadığı

Misal 1-də göstərilib. Deməli, hər hansı çoxluqda yığılan funkdional sıra həmin çoxluqda müntəzəm yığılmaya bilər.

Verilmiş çoxluqda sıraların müntəzəm yığılması üçün bir çox kafi əlamətlərdən istifadə olunur.

Əvvəlcə aşağıdakı tərifi yada salaq.

Tərif: Tutaq ki, $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ +.. (7)

funksional sırasının bütün hədləri E çoxluğunun hər bir nöqtəsində

$|f|_n(x) \leq a_n$, n=1,2,... (8)

bərabərsizliyini ödəyərsə, onda müsbət hədli $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$+... (9)

sırasına (7) sırasının E çoxluğunda majorantı deyilir.

Göründüyü kimi, (7) sırasının E çoxluğunda yığılan mojarantı varsa, yəni

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılandırsa, müsbət müsbət hədli sıraların yığılması haqqında müqayisə əlamətinə əsasən $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ sırası yığılan olar. Buda (7)sırasının E çoxluğunda mütləq yığıldığını göstərmiş olar. Mütləq yığılan sıranın özü də yığılandır. Buradan belə nəticəyə gəlmək olur ki, əgər (7) sırası üçün elə yığılan (9) sırası varsa, onda (7) sırası hər hansı S(x) funksiyasına yığılır.

(7) sırasının S(x) cəminə müntəzəm yığılmasını isə aşağıdakı teorem təmin edir(Kafi əlamət).

Teorem 7. (Veyereştrass əlaməti). Əgər (7) funksional sırası üçün elə yığılan (9) sırası varsa, bunu $n \geq n_0$ şərtini ödəyən n-lər və bütün x∈ E üçün (8) ödənirsə, onda (7) funksional sırası E çoxluğunda mütləq və müntəzəm yığılandır.

Burada da təbii olaraq, tələbələr aşağıdakı sualla qarşılaşırlar:

Funksional sıranın yığılan majorantının olması kafi şərtdir, həmin şərt zəruri ola bilər mi? Yəni dağılan majorantı olan funksional sıra müntəzəm yığılan ola bilərmi?

Suala kontrmisalla cavab verək.

Misal 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ sırası bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılandır.

Doğrudan da, bu sıra işarəsini növbə ilə dəyişən sıradır və x-in bütün qiymətlərində yığılandır. Verilən sıranın qalığı üçün

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudur və

$|R_n(x)| < \varepsilon$

ödənir, yəni verilən sıra bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılandır. Lakin x-in heç bir qiymətində mütləq yığılmır. Müsbət hədli

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+x^2}$ sırası x – in bütün qiymətlərində dağılandır. Bu misal onu göstərir ki, müntəzəm yığılan sıranın yığılan majorantı olmaya bilər. Başqa sözlə desək, majorant sıra dağılan olduqda da funksional sıra müntəzəm yığılan ola bilər.

Aşağıdakı teoremi nəzərdən keçirək:

Teorem 8. Əgər (7) sırasının hər bir həddi $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə və sıra S(x) funksiyasına müntəzəm yığılandırsa, onda S(x) funksiyası da $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. Teoremin isbatı zamanı qeyd olunmalıdır ki,hər bir şərt vacibdir. Onların istənilən biri ödənməzsə, teoremin hökmü doğru olmaz.

Bu teoremdə sıranın hər bir həddinin $[a, b]$ parçasında kəsilməz olması və həmçinin sıranın verilən $[a, b]$ parçasında S(x) funksiyasının müntəzəm yığılması əsas şərtdir.

Misal 7. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ parçasında $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n\cdot(1-\sin x)$ sırasına baxaq.

X=0 və x= $\frac{\pi}{2}$ olduqda sıranın bütün hədləri 0 və cəm də 0 olacaq.

Verilən sıranı $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n\cdot(1-\sin x) = (1-\sin x)\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n$ şəkildə yazaq və sonsuz həndəsi silsilənin vuruğu $0 < q = sinx < 1$ olan cəm düsturuna əsasən:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n = \frac{\sin x}{1-\sin x}\ \left(|q| < 1\ olduqda\ \ S = \frac{b_1}{1-q}\right)$$

Onda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n\cdot(1-\sin x) = (1-\sin x)\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n = (1-\sin x)\frac{\sin x}{1-\sin x} = \sin x$$

Sıranın cəmi isə

$$S(x)=\begin{cases} sinx,\ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ olduqda \\ 0,\ x = \frac{\pi}{2}\ olduqda \end{cases}$$

Göründüyü kimi, verilmiş sıranın hər bir həddi kəsilməz olduğu halda onun cəmi olan S(x) funksiyası kəsilməz deyil.

Göstərmək olar ki, bu sıranın cəmi $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ – də müntəzəm yığılan deyil.

Bu da onu göstərir ki, teoremdəki hər bir şərt əsasdır. Bu şərtlərdən hər hansı birinə tələb etməsək, teorem doğru olmaz.

Son olaraq qeyd edək ki, Riyazi analiz kursunun "Funksional ardıcıllıqlar və funksional sıralar" bölməsində (bakalavriat pilləsi üçün) digər teorem və təkliflərdə də verilən anlayışların tələbələr tərəfindən düzgün, anlaşıqlı mənimsənilməsində kontrmisallardan istifadə tələbələrin riyazi analizə dair biliklərinin sistemləşdirilməsində və onların yaradıcılıq imkanlarının artırılmasında müstəsna rol oynayır.

Problemin aktuallığı. "Funksional ardıcıllıqlar və funksional sıralar" pedaqoji ali məktəblərin Riyazi analiz kursunda geniş tətbiqi əhəmiyyəti olan bölmələrdən biridir. Həmin bölmədə təlim prosesində bir çox teorem və təkliflərdə anlayışların tələbələr tərəfindən mənimsənilməsində kontrmisalların əhəmiyyəti böyükdür. Burada belə kontrmisalların qurulmasından bəhs olunur.

Problemin elmi yeniliyi. Kontrmisallardan istifadə təlim prosesində xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. İlk dəfə olaraq ali pedaqoji məktəblərin riyazi analiz yeni təlim və pedaqoji texnologiyalardan istifadə baxımından kontrmisallardan istifadə ideya kimi irəli sürülür və təlimin keyfiyyətinin yüksəldilməsində əvəzsiz vasitələrdən biri kimi tədqiq olunur.

Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Təlim prosesində kontrmisallardan istifadə ideyası irəli sürülməkdə bir çox məqsəd daşıyır. Riyazi analiz kursunda belə misallardan istifadə olunduqda yaranan yeni anlayışlar tələbələr tərəfindən düzgün mənimsənilir və riyazi analizə dair biliklərinin sistemləşdirilməsində, fənnə olan maraqlarının artırılmasında mühüm rol oynayır. Və həm də qeyd edək ki, digər Riyazi elmlərin təlimi prosesində də kontrmisallardan istifadə geniş tətbiq oluna bilər. Bu baxımdan ideya geniş imkanlar açır.

Ədəbiyyat:

1. Гелбаум Б.. Олмегел Дж. Контрпримеры а анализ. -М.: Мир, -1997
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. -М.: Наука, -1969.
3. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры по математическому анализу. -М.:Высшая школа, -2007.
4. Demidoviç B.P. Riyazi analizdon məsələ və çalışmalar (rus dilindən tərcümə). -Bakı, -2001.
5. Davidov N.A., Korovkin P.P., Nikolski V.N. Riyazi analizdən məsələlər (rus dilindən tərcümə). -Bakı: Elm və Təhsil, -2016.

E-mail: ehmedmammedov1962@gmail.com

Rəyçilər: *riy.ü.fəls.dok.,dos.***M.Ə. Şahverdiyev**
riy.ü.fəls.dok.,dos. **R. H. Şirinov**
Redaksiyaya daxil olub: 15.05.2023