RİYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI

UOT 372.851

Fəxrəddin Feyzullah oğlu Əliyev,
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru.,
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti,

Xəlil Hacı oğlu Alıyev,
fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti

Röya Fikrət qızı Hətəmova
Sumqayıt Dövlət Universitetinin assistenti

TAM HƏLLİ TƏNLİKLƏR

Фахраддин Фейзуллах оглы Алиев,
доктор философии по математике,
доцент Сумгаитского Государственного Университета,

Халил Гаджи оглы Алыев,
доктор философии по математике
доцент Сумгаитского Государственного университета

Роя Фикрет гызы Хатамова
ассистент Сумгаитского Государственного Университета

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Fakhraddin Feyzullah Aliyev,
doctor of philosophy in mathematics
associate professor of Sumgayit State University,

Khalil Haji Aliyev,
doctor of philosophy in mathematics
associate professor of Sumgayit State University

Roya Fikret Hatamova
assistant of Sumgayit State University,

COMPLETE SOLUTION OF EQUATIONS

Xülasə. Məqalədə orta məktəb kursunda ayrıca bölmə kimi tədris olunmayan tam həlli tənliklərin müxtəlif növlərinin həlli metodikası verilmişdir. Bu metodların köməyilə şagird və müəllimlər rastlaşdıqları qeyri-standart və tam həlli tənliklərin tipindən asılı olaraq, fərqli yanaşmalar seçir və tənliyin tam köklərini tapır. Bu metod və yanaşmalar sonradan daha çətin və daha mürəkkəb ,qeyri-standart tənliklərin və həm də tənliklər sisteminin tam həllərinin tapılmasında və həllin araşdırılmasında tətbiq edilir. Məqalədə verilmiş tənliyin tam həllərini tapmaq üçün hər bir tənliyə onun tipindən və verilməsindən asılı olaraq, fərdi yanaşılır və bu səbəbdən də tətbiq ediləcək metod və sadələşdirmələr də fərqli olur. Ən çox tətbiq olunan metod olaraq, tənliyin sol tərəfinin vuruqlara ayrılması ,sol tərəfin vuruqlara ayrılmış formasında tam ədədlərin hasili və ya cəmi kimi göstərilə bilməsidir ki, bu problemin həllinin müxtəlif metodlarından məqalədə istifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: *tənlik, üstlü-loqarifmik, triqonometrik, qeyri-standart, dəyişən, funksiya, sabit, xətti, kvadratik, tənliyin kökü, tam ədəd, birdərəcəli, vuruqlara ayırmaq*

Резюме. В статье представлена методика решения различных типов уравнений полного решения, которые не рассматриваются как отдельный раздел в курсе средней школы. С помощью этих методов студенты и преподаватели выбирают разные подходы, в зависимости от типа нестандартного и полного решения уравнений, и находят полные корни уравнения.

Он используется для поиска и исследования более сложных и нестандартных уравнений, а также для полных решений системы уравнений. Кроме того, бывают разные упрощения. Наиболее часто используемый метод - разделение левой части уравнения на дроби, а левая часть может быть выражена как произведение или сумма целых чисел в форме, разделенной на дроби.

Ключевые слова: *уравнение, поверхностно-логарифмическое, тригонометрическое, нестандартное, переменное, функция, постоянное, линейное, квадратичное, корень уравнения, целое число, однопорядковое, деление*

Summary. The article presents a technique for solving various types of equations of a complete solution, which are not considered as a separate section in the high school course. With the help of these methods, students and teachers choose different approaches, depending on the type of non-standard and complete solution of equations, and find the full roots of the equation.

It is used to search and study more complex and more complex, non-standard equations, as well as for complete solutions of a system of equations. In addition, there are various simplifications. The most commonly used method is dividing the left side of an equation into fractions, and the left side can be expressed as the product or sum of whole numbers in fractional form.

Keywords: *equation, surface-logarithmic, trigonometric, non-standard, variable, function, constant, linear, quadratic, root of the equation, integer, one-digit, multiplication*

Tənliklər və tənliklər sistemi orta məktəb riyaziyyatının ən maraqlı və daha çox vaxt ayrılan bölməsidir. Bir çox müxtəlif tənliklər xətti, kvadratik, üstlü-loqarifmik, triqonometrik və s. tipləri vardır. Ancaq bir neçə növ tənliklər var ki, orta məktəb riyaziyyatında ya heç tədris edilmir, ya da səthi yanaşılır, az vaxt ayrılır.

Praktikada isə hər zaman rast gələ bilər, yəni, müəllim və ya istehsalatın tam fərqli sahələrində çalışan hər bir şəxs özündən asılı olmadan bu tip tənliklərlə və ya həlli bu tip tənliklərə rastlaşa bilər. Bu səbəbdən mükəmməl riyaziyyat hər şeyə hazır olmağı tələb edir!

Bu tip tənliklərdən biri də həlli tam ədədlər olan qeyri-standart tənliklərdir. Adından bəlli olduğu kimi bu tip tənliklərin həlli də qeyri-standart metodiki yanaşmalara əsaslanmalı və yaxud bu tip tənlikləri həll etmək üçün hər bir tənliyə fərdi və ya xüsusi yanaşma metodlarından istifadə edilir.

Belə xüsusi metodların köməyilə həll edilə bilən tam həlli olan bir neçə qeyri-standart tənlikləri və onların həlli yollarını nəzərdən keçirək:

Misal 1.

Əvvəlcə qismən sadə olan

$$x^2 - y^2 = 93$$

tənliyini nəzərdən keçirək. Tam həllərin həllin axtarışı ilə məşğul olaq: verilmiş tənliyin tam həllinin tapılması tələb olunur. Göründüyü kimi tənlik iki dəyişənli, iki dərəcəlidir və tənliyin sağ tərəfi sabit 93 ədədidir. Bu halda tənliyin sol tərəfi olan $f(x,y) = x^2 - y^2$ funksiyası vuruqlara ayrıla bildiyindən onu, $f(x,y) = f_1(x,y) \cdot f_2(x,y)$ kimi yazmaqla, tənliyi iki xətti tənliklər sisteminə gətirərək, həll etmək olur;

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 93 \Rightarrow$ sonuncu tənlikdən 8 sayda xətti tənliklər sistemi alınır;

1) $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=93 \end{matrix}\right\}$; 2) $\left.\begin{matrix} x+y=93 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\}$;

3) $\left.\begin{matrix} x+y=-1 \\ x-y=-93 \end{matrix}\right\}$;

4) $\left.\begin{matrix} x+y=-93 \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\}$; 5) $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ x-y=31 \end{matrix}\right\}$;

6) $\left.\begin{matrix} x+y=31 \\ x-y=3 \end{matrix}\right\}$;

7) $\left.\begin{array}{l} x+y=-3 \\ x-y=-31 \end{array}\right\}$; 8) $\left.\begin{array}{l} x+y=-31 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$

və naticədə bu tənliklərin hər biri həll edilir və tənliyin müvafiq 8 sayda həlli tapılır.

(47; -46); (47; -46); (-47; 46); (-47; -46)
(17; -14); (17; 14); (-17; -14); (-17; -14).

qeyd edək ki, tənlikdə hər iki $x; y$ dəyişənləri tənliyə cüt dərəcədən daxil olduğundan, $(47; 46)$ və $(17; -14)$ həllərindən yerdə qalan 6 həll alınır. Digər tərəfdən alınmış 8 tənliklər sistemində həlli tam ədədlər olmayan sistem olarsa, o halda həmin həllər atılır, yəni verilmiş tənliyin həlli kimi qəbul edilmir.

İndi isə 1-ci misaldan fərqli olaraq, birbaşa xətti tənliklər sistemin gətirilməyən, yəni, müəyyən çevirmələr tələb edən, qismən mürəkkəb olan aşağıdakı tənliyə baxaq:

Misal 2: $xy + 3x - 5y = -3$ tənliyinin tam həllərini tapın.

Həllin axtarışı-araşdırılması:

Verilmiş tənliyin sağ tərəfi tam ədəddir (-3) sol tərəfi isə vuruqlara ayrılmır. Bu çətinliyi aradan qaldırmaq üçün elə bir metod seçək ki, görünən çətinlik aradan qaldırılmış olsun:

Bunu üçün tənliyin hər tərəfini elə bir ədəd əlavə etməli ki, sağ tərəf tam ədəd olmaqla, sol tərəfi ki və ya bir neçə funksiyanın (bir dərəcəli!) hasili kimi göstərilə bilsin. Əvvəlcə tənliyin sol tərəfin aşağıdakı kimi çevirək:

$xy + 3x - 5y = x(y+3) - 5y = -3 \Rightarrow$

görünür ki, tənliyin sol tərəfində (-15) toplananı olsaydı onu iki xətti tənliyin hasili kimi yazmaq olardı;

$x(y+3) - 5y - 15 = -3 - 15$ alırıq.

$x(y+3) - 5(y+3) = -18$

$(y+3)(x-5) = -18$ (*) tənliyi I-tip tənliyin həlli metodu ilə həll edilə bilən tənlikdir və onu sağ tərəfin (-18)-in tam vuruqlarının hasillərinin sayı qədər xətti tənliklər sistemi şəklinə gətirə bilərik: bu tənliklərin sayı isə hasilləri

$\rightarrow \quad \longrightarrow$

$$-18 = \left.\begin{array}{l} \{(1;-18);(-1;18);(18;-1);(-18;1); \\ \quad (-2;9);(9;-2);(2;-9);(2;-9) \\ \quad (-3;6);(6;-3);(-6;3);(3;-6) \end{array}\right\}$$

kimi 12 sayda tənliklər olacaq.

1) $\left.\begin{array}{l} x-5=1 \\ y+3=-18 \end{array}\right\}$; 2) $\left.\begin{array}{l} x-5=-18 \\ y+3=1 \end{array}\right\}$;

3) $\left.\begin{array}{l} x-5=-1 \\ y+3=18 \end{array}\right\}$;

4) $\left.\begin{array}{l} x-5=18 \\ y+3=-1 \end{array}\right\}$; 5) $\left.\begin{array}{l} x-5=2 \\ y+3=-9 \end{array}\right\}$;

6) $\left.\begin{array}{l} x-5=-9 \\ y+3=2 \end{array}\right\}$;

7) $\left.\begin{array}{l} x-5=-2 \\ y+3=9 \end{array}\right\}$; 8) $\left.\begin{array}{l} x-5=9 \\ y+3=-2 \end{array}\right\}$;

9) $\left.\begin{array}{l} x-5=3 \\ y+3=-6 \end{array}\right\}$; 10) $\left.\begin{array}{l} x-5=-6 \\ y+3=3 \end{array}\right\}$;

11) $\left.\begin{array}{l} x-5=-3 \\ y+3=6 \end{array}\right\}$; 12) $\left.\begin{array}{l} x-5=6 \\ y+3=-3 \end{array}\right\}$;

hər bir tənlik həll edilir və müvafiq 12 sayda həllər tapılır:

$$\left\{\begin{array}{l} (6;-21);(-13;-2);(4;15);(23;-4);(7;-12) \\ (-4;-1);(3;6);(14;-5);(8;-9);(-1;0);(2;3);(11;-6) \end{array}\right\}$$

hər bir həll tam həllər cütündən ibarət olduğu üçün hər bir 12 sayda həll verilmiş $xy + 3x - 5y = -3$ tənliyinin tam həllər çoxluğudur.

Sadə, ancaq həlli prosesində xüsusi yanaşma tələb edən misal 1-ə oxşar olan $x^2 - y^2 = 6$ tənliyinə baxaq:

Misal 3 $x^2 - y^2 = 6$ tənliyinin tam həllini tapın. (-əgər varsa!)

Həllin axtarışı:

tam həlləri tələb olunan tənlikləri həll etməzdən qabaq, bu həllin varlığını müəyyən edə bilmək çox vacibdir. Çünki, həllin varlığını və ya həllin varlığının mümkün olmadığını göstərə bilmək, özü də bir xüsusi yanaşma, bir riyazi bacarıq, axtarış və ya metod tələb edir ki, elə əsas məqsədlərdən biri də şagird və ya tələbələrin bu mənada riyazi bacarıqlarını inkişaf etdirməkdir:

İlk baxışda

$x^2 - y^2 = 6$ –tənliyini

$(x-y)(x+y) = 3 \cdot 2 \quad (3;2)(1;6)(6;1)$

və s. kimi yazmaqla onun I-misala uyğun həllinin axtarışını aparmaq olardı.

Ancaq, $\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ sisteminin tam həllərinin olmadığı sübut olunsa da, bu tip tənliklərin tam həllərini axtararkən, tənliyin sağ tərəfinin cüt və ya tək ədəd olmasından asılı olaraq, axtarılan tam həllərin də, cüt və ya tək olması nəzərə alınaraq da, axtarmaq olar, daha doğrusu;

Fərz edək ki, axtarılan tam həllər olan *x* və *y* hər ikisi verilmiş $x^2 - y^2 = 6$ tənliyinin sağ tərəfinə müvafiq olaraq;

<u>I – hal:</u> cüt ədəd olsa; yəni,

$x = 2x_1$ və $y = 2y_1$ kimi qəbul edilsə,

Onda $(2x_1)^2 - (2y_1)^2 = 6$ olardı və buradan

$4x_1^2 - 4y_1^2 = 6 \Rightarrow 2x_1^2 - 2y_1^2 = 3$ tənliyini almış olardıq ki, bu tənlikdə tam həllərin olması üçün ziddiyyətin olduğu aşkar edilir! Çünki, $2x_1^2 - 2y_1^2 = 3$ tənliyində sol tərəf 2-yə tam bölündüyündən və sağ tərəfin (3-ün) 2-yə tam bölünməməsindən nəticə olaraq, alırıq ki, x_1 və y_1-kökləri tam ədədlər ola bilməz. İndi isə, 2-ci hala baxaq:

<u>II-hal:</u> tutaq ki, *x* və *y* hər ikisi tək tam

$x = 2x_1 + 1$

ədədlərdir; yəni $y = 2y_1 + 1$ –kimidir.

Onda $(2x_1 + 1)^2 - (2y_1 + 1)^2 = 6$ olmalıdır $\Rightarrow$

$\Rightarrow (2x_1)^2 + 4x_1 + 1 - (2y_1)^2 - 4y_1 - 1 =$

$4x_1^2 + 4x_1 - 4y_1^2 - 2y_1 = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1^2 - 2y_1^2 + 2x_1 - 2y_1 = 3 \Rightarrow$

sonuncu tənliyin sol tərəfi cüt, sağ tərəfi isə tək ədəd olduğundan, heç bir $(x_1; y_1)$ cütlüyü tənliyin tam həlli ola bilməz.

<u>Misal 4.</u>

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$$

tənliyinin tam həllərini tapın.

<u>Həllin axtarışı-analizi.</u>

Tənliyin sol tərəfi iki dərəcəli çoxhədlidir. Bu səbəbdən çoxhədlilər üçün tətbiq edilən iki yoldan birini seçə bilərik:

1) ya vuruqlara ayırmalı;
2) ya da tam kvadrata ayırma metodu ilə.

Bu misal üçün 1) – metodu mümkün olmadığından, 2) – metodunu seçək; yəni $x^2 - 4xy + 5y^2$ çoxhədlisini tam kvadrata ayıraq:

$x^2 - 4xy + 5y^2 = x^2 - 2x(2y) + (2y)^2 +$

almış oluruq.

Beləliklə, verilmiş tənliyi

$(x - 2y)^2 + y^2 = 169$ və ya

$(x - 2y)^2 + y^2 = 13^2$ kimi yaza bilərik ki, buradan da məlum Pifaqor ədədləri bu tənliyin yeganə həlli olduğunu nəzərə alsaq, $(5; 12; 13)$

$$\left.\begin{matrix} x - 2y = 5 \\ y = 12 \end{matrix}\right\}$$

kimi və daha 7 növ olmaqla 8 sayda (I hala uyğun) tənliklər sisteminə gətirilərək həll edilir.

Mürəkkəb tənlik;

Misal 5.

$$x^4 - y^4 - 20x^2 + 28y^2 = 107$$

tənliyinin tam həllərini tapın.

Həllin araşdırılması:

Bu tip tənliklərin ümumi həll yolu sol tərəfi $f(x;y) = f_1(x;y) \cdot f_2(x;y)$ şəklində göstərə bilməkdir. Ancaq tənliyin sol tərəfindəki iki dəyişənli çoxhədli funksiyanın verilməsindən asılı olaraq, heçdə həmişə bu mümkün olmur, bu halda da həmçinin, demək ki, fərqli metod, fərqli yanaşma axtarmaq lazımdır. Bunun üçün verilmiş $f(x;y) = x^4 - y^4 - 20x^2 + 28y^2$ funksiyasını aşağıdakı kimi çevirək;

$x^4 - y^4 - 20x^2 + 28y^2 =$

$x^4 + x^2y^2 - x^2y^2 - y^4 - 24x^2 + 4x^2 + 24y^2 + 4y^2 - 96 + 96 = (x^4 + y^2x^2 - 24x^2) - (x^2y^2 + y^4 - 24y^2) + (4x^2 + 4y^2 - 96) + 96 = x^2(x^2 + y^2 - 24) - y^2(x^2 + y^2 - 24) + 4(x^2 + y^2 - 24) + 96 = (x^2 + y^2 - 24)(x^2 - y^2 + 4) + 96.$

bu nəticəni tənlikdə nəzərə alsaq,

$(x^2 + y^2 - 24)(x^2 - y^2 + 4) = 11$ tənliyini alarıq.

Bu tip tənliklərin isə həll metodu məlumdur. Qeyd edək ki, heç də həmişə verilmiş tənliyin sol tərəfini $f_1(x;y) \cdot f_2(x;y)$ –şəklinə gətirmək asan olmur və bir çox hallarda isə mümkün olmur, bu səbəbdən yaranan çətinliyi aradan qaldıra bilmək üçün başqa metodun axtarışına baxaq:

Verilmiş tənlikdə $x^2 = \mathrm{u}, y^2 = \mathrm{v}$ qəbul edək.

Onda tənlik yeni

(*) $\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2 - 20\mathrm{u} + 28\mathrm{v} = 107$ kimi olur. Burada u və ya v dəyişənlərindən birini sabit qəbul etsək, digərinə nəzərən kvadrat tənlik almış olarıq və alınan kvadrat tənliyin həlli, məsələn u-ya nəzərən,

$\mathrm{u}_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 + \mathrm{v}^2 - 28\mathrm{v}}$ olar.

Bu həlldən bir neçə nəticə ala bilərik;

1) u_1 və u_2 köklərinin hər birinin rasional olması üçün (*) tənliyinin sol tərəfini 96 vahid kiçiltməliyik, yəni, tənliyi

$$u^2 - v^2 - 20u + 28v - 96 = 107 - 96$$

(**)

$$\Rightarrow u^2 - v^2 - 20u + 28v - 96 = 11 \Rightarrow$$

alırıq ki,

$$u_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 + v^2 - 28v + 96} = 10 \pm \sqrt{v^2 - 28v + 196} = 10 \pm (v - 14)$$

$$u_1 = v - 4$$

$u_2 = 24 - v$ alırıq; və beləliklə, (*) tənliyi (**) –şəklinə gətirilməli və onun köklərinin u_1 və u_2 olduğunu nəzərə almaqla Viyyet teoreminə görə (**) –tənliyini $(u - v + 4) \cdot (u + v - 24) = 11$ kimi, məlum və artıq həll edə biləcəyimiz şəklə gətirildi;

(**) –tənliyinin sağ tərəfinin, yəni 11-ədədinin 4-sayda vuruqların hasili kimi yaza bildiyimizdən ((1;11); (11;1); (-1;-11); (-11;-1)) verilmiş tənliyin həlli aşağıdakı kimi 4 sayda tənliklər sisteminin həllinə gətirir:

1) $\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 + 4 = 11 \\ x^2 + y^2 - 24 = 1 \end{matrix}\right\}$ 2) $\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 + 4 = 1 \\ x^2 + y^2 - 24 = 11 \end{matrix}\right\}$

3) $\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 + 4 = -11 \\ x^2 + y^2 - 24 = -1 \end{matrix}\right\}$ 4) $\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 + 4 = -1 \\ x^2 + y^2 - 24 = -11 \end{matrix}\right\}$

artıq, bu tənliklər sisteminin hər birinin həll metodu məlum olduğundan, onların hər biri həll edilir və tənliyin ümumi tam həllər çoxluğu tapılır.

Problemin elmi yeniliyi: Məqalədə orta məktəbin yuxarı siniflərində müxtəlif tip qeyri standart tənlik tam həllinin tapılmasının müxtəlif metodları və qeyri –standart göstərişlər verilmişdir. Həmçinin burada tətbiqi xarakter daşıyan mühüm metodların tətbiqi verilmişdir.

Tənliklər və tənliklər sistemi orta məktəb riyaziyyatının ən maraqlı və daha çox vaxt ayrılan bölməsidir. Bir çox müxtəlif tənliklər xətti, kvadratik, üstlü-loqarifmik, triqonometrik və s. tipləri vardır. Ancaq bir neçə növ tənliklər var ki, orta məktəb riyaziyyatında ya heç tədris edilmir, ya da səthi yanaşılır, az vaxt ayrılır.

Praktikada isə hər zaman rast gələ bilər, yəni, müəllim və ya istehsalatın tam fərqli sahələrində çalışan hər bir şəxs özündən asılı olmadan bu tip tənliklərlə və ya həlli bu tip tənliklərə rastlaşa bilər. Bu səbəbdən mükəmməl riyaziyyat hər şeyə hazır olmağı tələb edir!

Bu tip tənliklərdən biri də həlli tam ədədlər olan qeyri-standart tənliklərdir. Adından bəlli olduğu kimi bu tip tənliklərin həlli də qeyri-standart metodiki yanaşmalara əsaslanmalı və yaxud bu tip tənlikləri həll etmək üçün hər bir tənliyə fərdi və ya xüsusi yanaşma metodlarından istifadə edilir.

Belə xüsusi metodların köməyilə həll edilə bilən tam həlli olan bir neçə qeyri-standart tənlikləri və onların həlli yollarını nəzərdən keçirək:

Problemin praktik əhəmiyyəti: Məqalədə orta məktəbin yuxarı siniflərində şagirdlərin tənlik və bərabərsizliklərin həlli üçün yeni bilik və bacarıqlar verir və bununla da riyaziyyata olan maraqlarını artırır. Orta məktəb riyaziyyatı üçün o qədər də tipik olmayan tənliklərin həlli üçün müxtəlif metodiki göstəriş və priyomlardan istifadə edə bilmək bacarığı formalaşdırılır.

Problemin aktuallığı: Məqalədə xüsusi metodların köməyilə həll edilə bilən ,tam həlli olan bir neçə qeyri-standart tənliklərin və onların həlli yollarının araşdırılması orta məktəb müəllimləri və həmçinin riyaziyyatla sərbəst məşğul olanlar üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edə bilər

Ədəbiyyat:

1. Туманов, С.И. Поиски решения задач / С.И. Туманов. – Москва: Просвещение, -1969.

2 . Çətinlik dərəcəsi yüksək olan riyaziyyat məsələlərinin həlli üzrə praktikum. / Ə.Y. İbrahimov, A.Y. Kreymer, S.N. Sadıqov [və b.] -Bakı, -1975.

3. Riyaziyyat: Məsələ və misallar / M.H. Yaqubov [və b.] –Bakı: Çaşıoğlu, -2009.

E-mail: af_64@mail.ru

Rəyçilər: *riy.ü.fəls.dok., dos.* **M.H. Ağayarov,**
riy.ü.fəls.dok., dos. **N.S. Bayramova**

Redaksiyaya daxil olub: 19.05.2021