UOT 373.851

Laura Faiq qızı Fətullayeva
mexanika üzrə elmlər doktoru, professor
Tətbiqi analizin riyazi üsulları kafedrasının müdiri
Bakı Dövlət Universiteti

Nəzakət Böyükağa qızı Məmmədova
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Tətbiqi analizin riyazi üsulları kafedrasının müəllimi
Bakı Dövlət Universiteti

"ƏDƏDİ ÜSULLAR" FƏNNİNİN TƏDRİSİNDƏ FƏNLƏRARASI İNTEQRASİYADAN İSTİFADƏ

Лаура Фаик гызы Фатуллаева
доктор наук по механике, профессор
заведующая кафедрой Математические методы прикладного анализа
Бакинский Государственный Университет

Назакет Боюкага гызы Мамедова
доктор философии по математике, доцент
преподаватель кафедры Математические методы прикладного анализа
Бакинский Государственный Университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ИНТЕГРАЦИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ПРЕДМЕТА «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

Laura Faik Fatullayeva
doctor of sciences in Mechanics, professor
head of the department of Mathematical methods of applied analysis
Baku State University

Nazaket Boyukaga BoyukaghaMammadova
doctor of philosophy in Mathematics, associate professor
lecturer of the department of Mathematical methods of applied analysis
Baku State University

USING INTERDISCIPLINARY INTEGRATION IN TEACHING THE SUBJECT "NUMERICAL METHODS"

Xülasə. Məlumdur ki, riyaziyyat elminin müxtəlif sahələrində elə məsələlərə rast gəlinir ki, onları analitik üsullarla həll etmək çox çətin olur, hətta bəzən mümkün olmur. Bu səbəbdən "Ədədi üsullar" fənninin mövzuları aşağıdakı qruplara bölünür: cəbr və analizin, diferensial və inteqral tənliklərin təqribi həll üsulları. Riyazi modelləşdirmənin digər elm sahələrində (mexanika, fizika, kimya və s.) uğurla tətbiqi zamanı yaranan mürəkkəb tənlikləri də bəzi hallarda ədədi üsullarla həll etmək lazım gəlir. "Ədədi üsullar" fənnin tədrisi müəllimdən bu fənni digər riyazi elm sahələri və müxtəlif fənlərlə əlaqələndirmək bacarığını tələb edir. Təqdim olunan məqalənin əsas məqsədi fənlərarası inteqrasiyanın əhəmiyyətini və üstün cəhətlərini göstərməkdir.

Açar sözlər: *fənlərarası inteqrasiya, ədədi üsullar, Laqranj üsulu, Eyler üsulu, Navye-Stoks tənlikləri, fərq şəbəkəsi.*

Резюме. Известно, что в различных областях математической науки есть задачи, которые очень трудно, а иногда и невозможно решить аналитическими методами. По этой причине темы предмета «Численные методы» разделены на следующие группы: приближенные методы алгебры и анализа, приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Сложные уравнения, возникающие в результате успешного применения математического моделирования в других областях науки (механике, физике, химии и т.д.), в некоторых случаях также приходится решать численно. Преподавание предмета «Численные методы» требует от учителя уметь совмещать этот предмет с другими областями математической науки и различными предметами. Основная цель статьи - показать важность и преимущества междисциплинарной интеграции.

Ключевые слова: *междисциплинарное интегрирование, численные методы, метод Лагранжа, метод Эйлера, уравнения Навье-Стокса, разностная сетка.*

Summary. It is known that in various fields of mathematical science there are problems that are very difficult and sometimes impossible to solve using analytical methods. For this reason, the topics of the subject "Numerical Methods" are divided into the following groups: approximate methods of algebra and analysis, approximate methods for solving differential and integral equations. Complex equations arising as a result of the successful application of mathematical modeling in other fields of science (mechanics, physics, chemistry, etc.), in some cases also have to be solved numerically. Teaching the subject "Numerical Methods" requires the teacher to be able to combine this subject with other areas of mathematics and various subjects. The main purpose of the article is to show the importance and benefits of interdisciplinary integration.

Keywords: *interdisciplinary integration, numerical methods, Lagrange method, Euler method, Navier-Stokes equations, difference grid.*

Giriş. Hesablama hidrodinamikası (Computational Fluid Dynamics, CFD) – hidromexanikanın bölmələrindən biri olub, maye və ya qaz axınlarının hərəkət məsələlərinin həlli üçün ədədi üsullar və alqoritmlərdən istifadə edir [1, 2, 3]. Axının hər bir hissəsi üçün maye və qaz selinin sürəti, sıxlığı və temperaturunun ədədi qiymətinin hesablanması bu sinif məsələlərin həllinin nəticəsi kimi qəbul olunur.

Son zamanlar hesablama hidrodinamikası üsullarının inkişafının stabil artımı və geniş tətbiqi müşahidə olunur. Müasir dövrdə hidrodinamika texnologiyasının nəticələri istehsalat sferasının bir çox sahələrində, məsələn, maşınqayırma və aerokosmik sənayesində, kompüter və biotibbi aparatların hazırlanmasında tətbiq olunur. Bu faktın doğruluğunu aşağıdakı izahatlar təsdiq edir:

- kompüter hidrodinamikasının üsulları istehsal olunan məmulatın real protipinin hazırlanmasına qədər onun xassələrini modelləşdirməyə imkan verir, bu isə məmulatın hazırlanmasına sərf olunan qiymətə qənaət etməyə şərait yaradır;
- kompüter hidrodinamikasının üsulları daha dəqiq eksperimental nəticələr almağa imkan yaradır, doğrudan da laboratoriya daxilində aparılan sınaqlar zamanı aparatlar maye və ya qaz axınlarının paylanmasının sonuncu formasına müəyyən xətalar verə bilərlər;
- hesablama hidrodinamikasının əsasını təşkil edən ədədi üsullar daha dəqiq nəticələr almaq məqsədilə daima təkmilləşirlər. Bundan başqa, hesablamaların sürəti artır, hesablama xətaları isə aşağı düşür. Bu, real eksperimentlə müqayisədə modelləşməni daha da cəlbedici edir.

Deməli, burada məqsəd bərk cisim ətrafında qaz və ya maye axınlarının hərəkətini modelləşdirən elə nəzəriyyənin yaradılmasıdır ki, bu nəzəriyyə istifadəçilərin az gücə malik olan kompüterlərində işləyə bilsin və istifadəçidən hidromexanika sahəsində dərin biliklər tələb etməsin.

Bu məqsədə çatmaq üçün aşağıdakı məsələləri həll etmək lazımdır:

- hidromexanikanı elə səviyyədə öyrənmək gərəkdir ki, qaz və ya maye axınlarının hərəkətini modelləşdirən nəzəriyyənin yaradılması üçün kifayət etsin;
- hesablama hidrodinamikası üsullarını tədqiq etmək;
- maye və ya qaz axınlarının modelləşdirilməsinin ədədi üsulunu seçmək və tətbiq etmək.

1. Məsələnin qoyuluşu

1.1. Maye və qaz modelləri. Hidrodinamikada maye və qazların hərəkətini təsvir etmək üçün iki üsul vardır: Laqranj üsulu və Eyler üsulu.

Laqranj üsulunda maye və ya qazın hər bir hissəciyinin hərəkətinə baxılır. Hər bir zaman anında maye və ya qazın hissəciyi onun fəzadakı koordinatları ilə xarakterizə olunur. Beləliklə, mayenin bütün axınının hərəkətini hər bir hissəciyin vəziyyətinin onun başlanğıc vəziyyətindən və zamandan asılılığı kimi təyin etmək olar: [4]

$$\begin{cases} x_i = f(x_{0,i}, y_{0,i}, z_{0,i}, t) \\ y_i = g(x_{0,i}, y_{0,i}, z_{0,i}, t) \\ z_i = h(x_{0,i}, y_{0,i}, z_{0,i}, t), \end{cases} \qquad (1.1)$$

burada x_i, y_i, z_i – *i*-ci hissəciyin oX, oY, oZ oxları üzrə koordinatları, $x_{0,i}, y_{0,i}, y_{0,i}$ – *i*-ci hissəciyin oX, oY, oZ oxları üzrə başlanğıc koordinatlarıdır.

Eyler üsulu isə maye axınının hərəkət etdiyi fəzanın özünə tətbiq olunur. Müəyyən zaman anında (x, y, z) koordinatlı nöqtədə maye və ya qazın çox kiçik həcmi yerləşir, bu həcm ani yerli sürət adlanan hər hansı $\vec{V}_{x,y,z}$ sürətinə malikdir. Ani yerli sürətlərin yığımı sürətlər vektorunun üçölçülü massividir, bu massivə sürətlər meydanı deyilir. Beləliklə, mayenin bütün axınının hərəkəti sürətlər meydanının zamana görə dəyişilməsilə təyin olunur:

$$\begin{cases} u_{x,y,z} = f_{x,y,z}(t), \\ v_{x,y,z} = g_{x,y,z}(t), \\ w_{x,y,z} = h_{x,y,z}(t), \end{cases} \qquad (1.2)$$

burada $u_{x,y,z}, v_{x,y,z}, w_{x,y,z}$ – $\vec{V}_{x,y,z}$ sürət vektorunun uyğun olaraq oX, oY, oZ oxlarına paralel olan komponentləri, $f_{x,y,z}(t)$, $g_{x,y,z}(t)$, $h_{x,y,z}(t)$ – sürət vektorunun zamandan asılı olan komponentləridir, yəni funksional asılılıqlardır.

Baxılan halda qoyulmuş məsələnin həlli üçün daha əlverişli üsul olan Eyler modeli seçilir.

1.2. Navye-Stoks tənlikləri. Navye-Stoks tənlikləri ilk dəfə bu tənlikləri 1822-ci ildə almış Klod-Lui Navye və 1849-cu ildə onları daha da təkmilləşdirmiş Ser Corc Qabriel Stoksun şərəfinə adlandırılmışdır. Bu diferensial tənliklər maye və qazların hərəkətini təsvir edirlər [5].

Navye-Stoks tənliklərinin iki forması daha tez-tez istifadə olunur:

1) sıxılan maye üçün hərəkət tənliyi:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + V * \nabla V\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2 V + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla * V) + f \qquad (1.3)$$

və ona uyğun kəsilməzlik tənliyi:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla * (\rho V) = 0\,; \qquad (1.4)$$

2) sıxılmayan maye üçün hərəkət tənliyi:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + V * \nabla V\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2 V + f\,, \qquad (1.5)$$

və ona uyğun kəsilməzlik tənliyi:

$$\nabla v = 0\,, \qquad (1.6)$$

burada: ρ – sıxlıq, v – sürət, t – zaman, μ – özlülük əmsalı, ζ – dinamiki özlülük (“ikinci özlülük” də adlanır), f – cismə təsir edən digər qüvvələr, məsələn, qravitasiya qüvvəsi, ∇ - Hamilton operatoru – koordinatlar üzrə xüsusi törəmə. Üçölçülü fəza üçün Hamilton operatoru aşağıdakı formadadır:

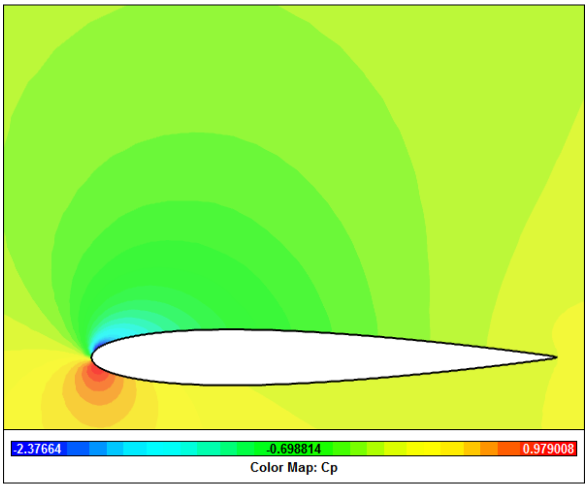
$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}, \qquad (1.7)$$

∇^2 – iki Hamilton operatorunun skalyar hasili isə belədir:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}. \qquad (1.8)$$

Burada tənliyin sıxılmayan maye üçün olan forması istifadə olunacaqdır, ona görə ki, sıxılan maye halında hesablamaların mürəkkəbliyi əhəmiyyətli dərəcədə artır. Sıxılmayan maye halında isə axın hərəkətinin səsin sürətindən daha da aşağı sürətlərindəki real nəticələrindən az fərqlənən nəticələr alınır [6].

Tez-tez hesablamaların çətinliyini aradan qaldırmaq məqsədilə üçölçülü fəzada bütün axının modelləşdirilməsi əvəzinə axının bir kəsiyinin modelləşdirilməsi həyata keçirilir. Bu halda axının modelləşdirilməsini ikiölçülü fəzada aparmaq olar. Nümunə olaraq belə modelləşdirmə şəkil 1-də göstərilmişdir [7].



Şək. 1. Hava axınının bir kəsiyinin təyyarənin qanadı yanında modelləşdirilməsi.

İxtiyari özlü mühitin xüsusiyyətləri (sıxlıq, özlülük) bir ölçüsüz parametr – Reynolds ədədilə verilə bilər. Bu parametr ölçüsüz kəmiyyətdir, o, mühitin daxilində inersiya qüvvələrinin özlü qüvvələrə nisbətini xarakterizə edir [8] və aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$Re = \frac{\rho v_{avg} D_h}{\mu}, \qquad (1.9)$$

burada ρ – mühitin sıxlığı, v_{avg} – maye və ya qazın hərəkətinin orta sürətidir, μ – mühitin özlülüyü, D_h - kanalın hidravlik diametridir, bu kanal üzrə maye və ya qaz hərəkət edir. Diametr bu düsturla hesablanır:

$$D_h = \frac{4A}{P}, \qquad (1.10)$$

burada A – kanalın en kəsiyinin sahəsidir, P – kanalın islanmış hissəsinin perimetridir.

Beləliklə, sıxılmayan maye və ya qaz axınının kəsiyini modelləşdirən zaman tənliklər aşağıdakı formada olur:

hərəkət tənliyi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + f_x, \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + f_y, \qquad (1.12)$$

kəsilməzlik tənliyi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (1.13)$$

burada $u - \vec{v}$ sürət vektorunun X-komponenti, $v - \vec{v}$ sürət vektorunun Y-komponenti, $f_x - \vec{f}$ xarici qüvvələr vektorunun X-komponenti, $f_y - \vec{f}$ xarici qüvvələr vektorunun Y-komponenti, Re – Reynolds ədədi, ölçüsüz kəmiyyətdir.

1.3. Diferensial tənliklərin ədədi üsullarla həlli. Navye-Stoks tənliklərinin geniş tətbiq oblastına malik olmasına baxmayaraq, indiyə kimi bu tənliklərin ümumi halda analitik həlli yoxdur [9]. Bundan başqa, hal-hazırda üçölçülü fəzada bu cür həllin varlığı və hamarlığı isbat olunmayıbdır. Kley riyaziyyat institutu bu problemi yüzilliyin əsas problemlərindən biri adlandırmışdır. Problem hələ də aktualdır və bütün dünya riyaziyyatçıları tərəfindən aktiv olaraq həll olunur.

XX əsrin 50-ci illərinin sonundan başlayaraq, kompüter texnologiyalarının inkişafı ilə əlaqədar olaraq, ədədi üsullardan istifadə etməklə həllin aproksimasiyasının alınması mümkün oldu. Hal-hazırda çoxlu ədədi üsullar vardır, lakin onlardan yalnız ikisi kifayət qədər tez-tez istifadə olunur və Eyler tənliklərinə əsasən axının modelləşdirilməsinə imkan verirlər: sonlu fərqlər üsulu və sonlu elementlər üsulu. Aşağıda hər iki üsula baxılacaq, onların üstün və çatışmayan cəhətləri göstəriləcəkdir.

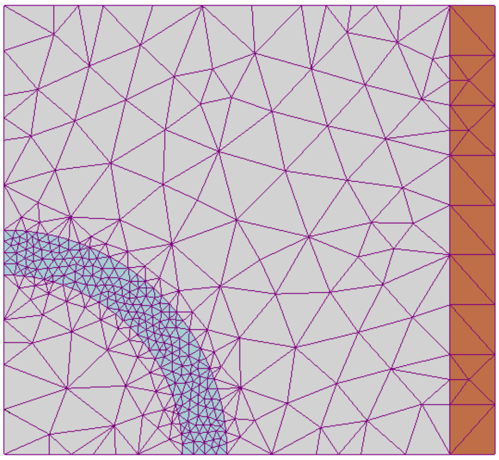
a) Sonlu fərqlər üsulu. Sonlu fərqlər üsulunun əsas ideyası fərq şəbəkəsinin qurulmasıdır. Düzbucaqlı paralelepiped kimi təsvir olunmuş fəza böyük olmayan bərabər hissələrə bölünür (düzbucaqlı paralelepipedlər). Sonra isə verilmiş tənlik şəbəkənin hər bir elementi üçün ayrıca tənliyə çevrilir [6]. Alınmış tənliklərin həlli üçün şəbəkənin divarlarının hər birində axının sürətini bilmək tələb olunur. Bunun üçün sərhəd şərtlərinin müxtəlif növləri işlənib hazırlanır.

Sonlu fərqlər üsulunun üstün cəhətləri bunlardır: hesablamaların paralel aparılması xassəsi, sadə misallar üzərində sürətli işləmə qabiliyyəti və üsulun reallaşdırılması zamanı daha sadə olması.

Sonlu fərqlər üsulunun əsas çatışmayan cəhəti ondan ibarətdir ki, bu üsulu ixtiyari oblastda tətbiq etmək mümkün deyil. Beləliklə, hesablamaların çoxlu olması da üsulun mənfi cəhətidir (hava axınının sürətinin hesablanması eksperimentin aparıldığı fəzadan kənardadır).

b) Sonlu elementlər üsulu. Sonlu elementlər üsulunun əsas ideyası ondan ibarətdir ki, eksperimentin aparıldığı fəza sonlu sayda altoblastlara (elementlərə) bölünür. Hər bir elementdə approksimasiya funksiyası individual olaraq seçilir. Diferensial tənliyin həlli elementlərin sərhədlərində axtarılır [6].

Sonlu elementlər üsulunun əsas üstün cəhəti hesablamaların dəqiqliyini lokal dəyişməyin mümkün olmasıdır. Fəzanın yüksək dəqiqliyin tələb olunduğu oblastlarında sonlu elementləri az etmək olar. Belə bölünməyə aid nümunə şəkil 2-də göstərilmişdir.



Şək. 2. Eksperimentin aparıldığı fəzanın sonlu elementlərə bölünməsinə aid nümunə.

Bu cür yanaşma həll prosesinin vaxtına çox qənaət etməyə imkan verir. Lakin eksperimentin aparıldığı fəzanın sonlu elementlərə bölünməsinin alqoritmi çox mürəkkəbdir, bu isə üsulun çatışmayan cəhətidir.

Burada Navye-Stoks tənliklərinin diskretizasiya alqoritmi kimi sonlu fərqlər üsulu seçilmişdir [6]. Ona görə ki, bu üsul hesablamaların paralel aparılmasına imkan verir və həll alqoritmi daha sadə realizasiya olunur.

2. Navye-Stoks tənliklərinin sonlu fərqlər üsulu ilə həlli

Navye-Stoks tənliklərinin həllinin sonlu fərqlər üsulu ilə alınmasının mümkünlüyünü göstərmək üçün aşağıdakı eksperiment işlənib hazırlanmışdır:

Dekart koordinat sistemində yerləşən, a, b, c tərəflərinə malik olan düzbucaqlı paralelepipedin daxilini ***eksperimentin aparıldığı fəza*** adlandıracağıq. Fərz olunur ki, orada ixtiyari formalı bərk cisim yerləşmişdir. Düzbucaqlı paralelepipedin bütün üzləri koordinat oxlarına paraleldir. Bərk cisim verilmiş sıxlığa və Reynolds ədədinə malik olan su və ya qazşəkilli mühitdə yerləşir. O, eksperimentin aparıldığı fəzadan kənara çıxmamalıdır. Düzbucaqlı paralelepipedin üzlərindən birinə dairəvi kəsiyə malik olan boru birləşdirilmişdir. Bu boru ilə $\vec{V}$ – sabit sürətli maye və ya qaz seli hərəkət edir. Eksperiment t_0 – eksperimentin başladığı vaxtdan t_{max} – eksperimentin bitdiyi vaxta qədər aparılır.

Üçölçülü halda eksperimentin nəticələrini almaq üçün eksperimentin aparıldığı ixtiyari zaman anında, hər bir nöqtəsində axının təzyiq və sürətlərinin paylanma şəklini almaq lazımdır. Eyni zamanda **ikiölçülü halda** eksperimentin nəticələrini almaq üçün isə eksperimentin aparıldığı fəzanın ixtiyari seçilmiş kəsiyinin hər bir nöqtəsində axının təzyiq və sürətlərinin paylanma şəklini almaq tələb olunur. Eksperimentin aparıldığı fəzanın seçilmiş kəsiyi eksperimentin aparıldığı ixtiyari zaman anı üçün koordinat oxlarına paralel olmalıdır.

Hesablamaların sadəliyindən ötrü ikiölçülü hal üçün alqoritm qurulur.

2.1. Fərq şəbəkəsi. Tutaq ki, $\boldsymbol{Ox}$ və $\boldsymbol{Oy}$ koordinat oxlarına paralel olaraq yerləşmiş düzbucaqlı fəza verilmişdir:

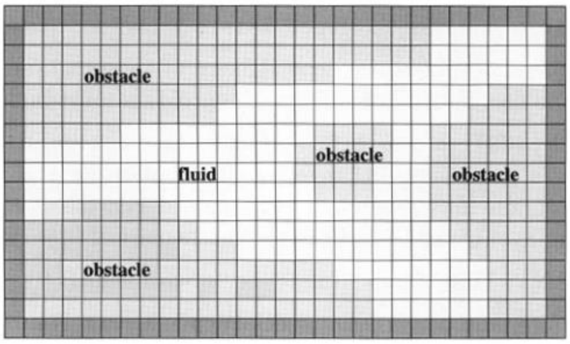
$$\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

Bu fəzada Ox oxu üzrə eyni ölçülü i_{max} oyuqlu və Oy oxu üzrə isə eyni ölçülü j_{max} oyuqlu şəbəkə quraq. Nəticədə hər bir oyuğun ölçüsü aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\delta x = \frac{a}{i_{max}}, \delta y = \frac{b}{j_{max}}; \tag{2.2}$$

(i, j) - elə oyuqdur ki, onun mərkəzi fəzanın koordinatı $((i - 0.5)\delta x, (j - 0.5)\delta y)$ olan nöqtəsində yerləşir. Eksperimentin təsvirinə əsasən eksperimentin aparıldığı fəzanın daxilində ixtiyari formalı bərk cisim yerləşir. Buradan alınır ki, iki növ oyuqlar var: maye oyuğu və maneə oyuğu. Eksperimentin başlanğıc şərtlərini verməkdən ötrü oyuğa 2 sıra və 2 sütun əlavə edirlər.

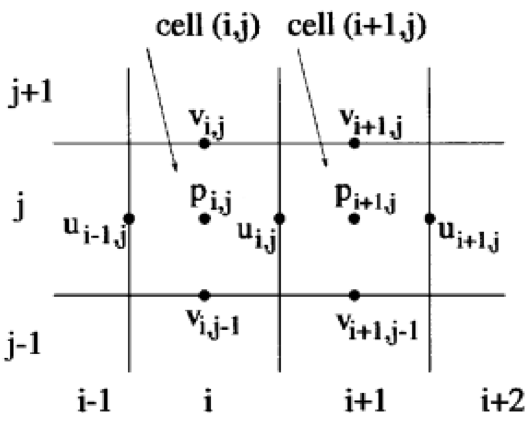
$j \in \{0, j_{max}+1\}$ olduqda $(0,j)$ və $i \in \{0, i_{max}+1\}$ olduqda $(i,0)$ oyuqları da maneə-oyuqlarıdır. Oyuqlara bölünmüş belə fəzanın sonuncu forması şəkil 3-də təsvir olunmuşdur.



Şək. 3. Maye oyuqları (ağ), maneə oyuqları (açıq boz) və düzbucaqlı fəzanın sərhədindəki oyuqlar (tünd boz).

Hər bir oyuq mayenin hər hansı həcmini xarakterizə edir və üç parametrlə təyin olunur: p – təzyiq, X - u sürət vektorunun komponenti və Y - v sürət vektorunun komponenti ilə.

Navye-Stoks tənliklərinin diskretizasiyası fərq şəbəkəsində (Staggered grid) baş verir. Şəbəkə fərq adlanır, ona görə ki, (i,j) oyuğunu müəyyən edən parametrlər fəzanın bir nöqtəsinə bağlanmayıblar. (i,j) oyuğunun təzyiqi oyuğun koordinatları $((i-0.5)\delta x, (j-0.5)\delta y)$ olan mərkəzinə görə təyin olunur. (i,j) oyuğunun sürət vektorunun X-komponenti $(i\delta x, (j-0.5)\delta y)$ koordinatları, (i,j) oyuğunun sürət vektorunun Y-komponenti isə $((i-0.5)\delta x, j\delta y)$ koordinatları ilə müəyyən olunur. Bu cür fərq şəbəkəsinin vizual təsviri şəkil 4-də göstərilmişdir.



Şək. 4. Fərq şəbəkəsinə aid nümunə.

Kəsilməzliyin (1.13) tənliyi hər bir $(i,j), i = 1, \dots, i_{max};\ j = 1, \dots, j_{max}$ xanasının mərkəzində diskretləşir. Xüsusi törəmələr aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\delta x}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\delta y}; \qquad (2.3)$$

Digər tərəfdən, u üçün olan (1.11) hərəkət tənliyi oyuğun şaquli tərəflərinin mərkəzində, v üçün olan (1.12) hərəkət tənliyi isə oyuğun üfüqi tərəflərinin mərkəzində diskretləşir. *Tənliyin diffuziya hədləri* adlanan ikinci tərtib $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ törəmələri və təzyiqin $\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right)$ xüsusi törəmələri nisbətən sadə alınır, aşağıdakı düsturlar vasitəsilə təyin olunurlar:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\delta x^2)}; \qquad (2.4)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\delta y^2)}; \qquad (2.5)$$

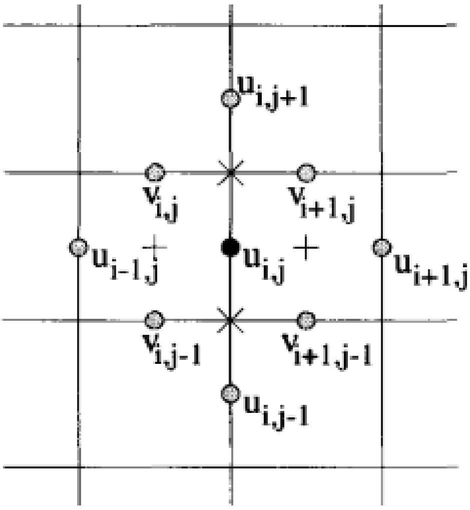
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\delta x^2)}; \qquad (2.6)$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\delta y^2)}; \qquad (2.7)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x}; \qquad (2.8)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]_{i,j} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y}. \qquad (2.9)$$

Tənliyin $\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x}, \frac{\partial(uv)}{\partial y}, \frac{\partial(uv)}{\partial x}, \frac{\partial(v^2)}{\partial y}\right)$ – konveksiya hədlərinin diskretizasiyası zamanı bəzi çətinliklər yaranır. Məsələn, $\frac{\partial(uv)}{\partial y}$ həddinin (i,j) oyuğunun sağ tərəfinin mərkəzində diskretizasiyası üçün (şək. 7-də qara nöqtə) uv hasilinin şək. 5-də × işarəsi ilə qeyd olunmuş nöqtələrdəki qiymətləri lazımdır. Verilmiş qiyməti almaq üçün baxılan realizasiyada qonşu oyuqlardan olan u və v sürətlərinin orta ədədi qiymətləri istifadə olunur.



Şək.5. Konveksiya hədlərinin diskretizasiyası.

Beləliklə, konveksiya hədləri aşağıdakı düsturlarla verilir:

$$\left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta x}\left(\left(\frac{u_{i,j}+u_{i+1,j}}{2}\right)^2 - \left(\frac{u_{i-1,j}+u_{i,j}}{2}\right)^2\right); \quad (2.10)$$

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta y}\left(\frac{v_{i,j}+v_{i+1,j}}{2}\frac{u_{i,j}+u_{i,j+1}}{2} - \frac{v_{i,j-1}+v_{i+1,j-1}}{2}\frac{u_{i,j-1}+u_{i,j}}{2}\right. \quad (2.11)$$

;

$$\left[\frac{\partial(v^2)}{\partial y}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta y}\left(\left(\frac{v_{i,j}+v_{i,j+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_{i,j-1}+v_{i,j}}{2}\right)^2\right); \quad (2.11)$$

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta x}\left(\frac{u_{i,j}+u_{i,j+1}}{2}\frac{v_{i,j}+v_{i+1,j}}{2} - \frac{u_{i-1,j}+u_{i-1,j+1}}{2}\frac{v_{i-1,j}+v_{i,j}}{2}\right) \quad 2.12)$$

.

2.2. Başlanğıc və sərhəd şərtləri. Əvvəlki bölmədə təyin olunmuş fərq şəbəkəsindən istifadə etməklə Navye-Stoks tənliklərinin diskretizasiyasından ötrü $\boldsymbol{i \in \{1, i_{max} - 1\}}$ olduqda $\boldsymbol{u}$ – üfüqi sürəti üçün və $\boldsymbol{j \in \{1, i_{max}\}}$ olduqda $\boldsymbol{v}$ – şaquli sürəti üçün başlanğıc şərtlərin verilməsi tələb olunur. Deməli, aşağıdakı başlanğıc qiymətlərin təyin olunması lazımdır:

$$\begin{array}{l} u_{0,j}, u_{i_{max},j}, j = 1, \dots, j_{max} \\ v_{i,0}, v_{i,j_{max}}, i = 1, \dots, i_{max} \\ u_{i,0}, u_{i,j_{max}+1}, i = 1, \dots, i_{max} \\ v_{0,j}, v_{i_{max}+1,j}, j = 1, \dots, j_{max} \end{array}; \quad (2.13)$$

Maye oyuğunun və maneə-oyuğun sərhədində **sərhəd şərtlərinin** çoxlu növləri vardır, lakin burada yalnız üç tip sərhəd şərtlərinə baxılacaqdır: sərbəst sürüşmə (free-slip), yapışma (no-slip) və sərbəst axın (free-flow).

1) Sərbəst sürüşmə

Bu halı qazlara tətbiq edək. Fərz olunur ki, qaz və maneə arasında sürtünmə yoxdur, ona görə də, qaz bərk cismin, eksperimentin aparıldığı fəzanın sərhədlərinin və axın mənbəyinin çərçivəsinin yanında sərbəst hərəkət edir. Beləliklə, sərbəst sürüşmə şərti daxilində sürətlərin aşağıdakı qiymətləri alınır:

$$\begin{array}{l} u_{i,0} = u_{i,1}, u_{i,j_{max}+1} = u_{i,j_{max}}, i = 1, \dots, i_{max} \\ v_{0,j} = v_{1,j}, v_{i_{max}+1,j} = v_{i_{max},j}, j = 1, \dots, j_{max} \end{array}; \quad (2.14)$$

2) Yapışma

Bu üsul o zaman tətbiq olunur ki, maye maneəyə yapışır. Deməli, verilmiş nöqtədə mayenin sürəti maneənin hərəkət sürətinə bərabərdir. Baxılan halda bərk cisim, eksperimentin aparıldığı fəzanın sərhədləri və axın mənbəyinin çərçivəsi maneə rolunu oynayırlar. Bütün bu cisimlər hərəkətsizdirlər, onların sürəti isə sıfra bərabərdir. Nəticədə, yapışma şərti daxilində sürətlərin aşağıdakı qiymətləri alınır:

$$\begin{array}{l} u_{i,0} = -u_{i,1}, u_{i,j_{max}+1} = -u_{i,j_{max}}, i = 1, \dots, i_{max} \\ v_{0,j} = -v_{1,j}, v_{i_{max}+1,j} = -v_{i_{max},j}, j = 1, \dots, j_{max}. \end{array} \quad (2.15)$$

3) Sərbəst axın

Bu şərt eksperimentin aparıldığı fəzanın sərhədində yalnız o zaman tətbiq olunur ki, sərhəd virtual olsun və axın sərhəddən sərbəst axsın. Beləliklə, belə maneəli sərhəddə mayenin sürəti maneənin "daxilinin" hərəkət sürətinə bərabərdir. Onda, yapışma şərti daxilində sürət-lərin aşağıdakı qiymətləri alınır:

$$\begin{array}{l} u_{0,j} = u_{1,j}, u_{i_{max},j} = u_{i_{max}-1,j} \\ v_{0,j} = v_{1,j}, v_{i_{max}+1,j} = v_{i_{max},j}, j = 1, \dots, j_{max} \\ u_{i,0} = u_{i,1}, u_{i,j_{max+1}} = u_{i,j_{max}} \\ v_{i,0} = v_{i,1}, v_{i,j_{max}} = v_{i,j_{max-1}}, i = 1, \dots, i_{max}. \end{array} \quad (2.16)$$

2.3. Zamana və fərq şəbəkəsinin oyuqlarına görə diskretizasiya. Zamana görə diskretizasiya etməkdən ötrü Eyler üsulundan istifadə olunur. Bunun üçün eksperimentin aparıldığı $[\mathbf{0}, \boldsymbol{t_{end}}]$ zaman intervalını bərabər intervallara bölək:

$$[n \cdot \delta t, (n+1)\delta t], n = 0, \dots, \frac{t_{end}}{\delta t} - 1.$$

t_{n+1} zaman anında hesab olunur ki, t_n zaman intervalı üçün bütün naməlum parametrlərin qiymətləri artıq məlumdur. t_{n+1} zaman intervalı üçün nəticələr aşağıdakı şəkildə hesablanır: t_{n+1}

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{(n+1)} := \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\delta t},$$
$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]^{(n+1)} := \frac{v^{(n+1)} - v^{(n)}}{\delta t}. \qquad (2.17)$$

Fərq şəbəkəsinin oyuqlarına görə diskretizasiya etməkdən ötrü fərz olunur ki, eksperimentin əvvəlində fərq şəbəkəsinin bütün oyuqları üçün başlanğıc sürət və təzyiq verilmişdir. Hər bir iterasiyada zaman δt qədər artır, bu artım eksperimentin (t_{end}) – bitmə zamanına çatana kimi davam edir.

δt-nin qiyməti eksperimentator tərəfindən verilə bilər, lakin ölçmələrin xətasını azaltmaq üçün δt-nin qiymətini bu düsturla hesablamaq lazımdır:

$$\delta t = min\left(\frac{Re}{2}\left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2}\right)^{-1}, \frac{\delta x}{|u_{max}|}, \frac{\delta y}{|v_{max}|}\right); \qquad (2.18)$$

burada u_{max} – mühitin hərəkətinin oX oxu üzrə maksimal sürəti, v_{max} – mühitin hərəkətinin oY oxu üzrə maksimal sürətidir.

Hərəkət tənliyinin zamana görə diskretizasiyasını aparaq:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta t\left(\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + f_x - \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$
$$v^{(n+1)} = v^{(n)} + \delta t\left(\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + f_y - \frac{\partial p}{\partial y}\right). \qquad (2.19)$$

Burada və bundan sonra yuxarıda mötərizə içərisində yazılmış indeks elə zaman intervalını göstərir ki, həmin interval üçün verilmiş dəyişən doğrudur, məsələn, $u^{(n)}$ – t_n zaman intervalında mühitin oX oxu üzrə hərəkət sürətini bildirir.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$F = u^{(n)} + \delta t\left(\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + f_x\right)$$
$$G = v^{(n)} + \delta t\left(\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + f_x\right). \qquad (2.20)$$

Onda (2.19) tənliyini bu şəkildə yazmaq olar:

$$u^{(n+1)} = F - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$v^{(n+1)} = G - \delta t \frac{\partial p}{\partial y}. \qquad (2.21)$$

Hərəkət tənliklərinin diskretizasiyasını başa çatdırmaq üçün (2.22) tənliklərinin sağ tərəfləri də zamana görə diskretləşdirilməlidir. Tənliklərin son forması aşağıda verilmişdir:

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}$$
$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}. \qquad (2.22)$$

Kəsilməzlik tənliyində t_{n+1} zaman intervalını yerinə yazdıqdan sonra t_{n+1} zaman intervalı üçün Puasson tənliyi alınır:

$$\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta t}\left(\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial y}\right). \qquad (2.23)$$

Tamamilə diskretləşdirilmiş tənlikləri almaqdan ötrü (2.23), (2.24) tənliklərini fərq şəbəkəsinin elementləri üzrə diskretləşdirmək lazımdır. Bunun üçün (2.4) - (2.12) düsturlarından istifadə olunur:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = F_{i,j}^{(n)} - \frac{\delta t}{\delta x}\left(p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}\right),$$
$$i = 1, \dots, i_{max} - 1, j = 1, \dots, j_{max}; \qquad (2.24)$$

$$v_{i,j}^{(n+1)} = G_{i,j}^{(n)} - \frac{\delta t}{\delta y}\left(p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}\right),$$
$$i = 1, \dots, i_{max}, j = 1, \dots, j_{max} - 1; \qquad (2.25)$$

Burada

$$F_{i,j}^{(n)} = u_{i,j} + \delta t\left(\frac{1}{Re}\left(\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{i,j} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{i,j}\right) - \left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\right]_{i,j} - \left[\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]_{i,j} + f_x\right),$$
$$i = 1, \dots, i_{max} - 1, j = 1, \dots, j_{max}; \qquad (2.26)$$

$$G_{i,j}^{(n)} = v_{i,j} + \delta t\left(\frac{1}{Re}\left(\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{i,j} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{i,j}\right) - \left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}\right]_{i,j} - -\left[\frac{\partial(v^2)}{\partial y}\right]_{i,j} + f_y\right) \quad (2.27)$$

,
$i = 1, \ldots, i_{max}, j = 1, \ldots, j_{max} - 1$.

(2.23) Puasson tənliyi diskretləşdirilmiş formada aşağıdakı şəklə düşür:

$$\frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{(\delta x^2)} + \frac{p_{i,j+1}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}}{(\delta y^2)} = \frac{1}{\delta t}\left(\frac{F_{i,j}^{(n)} - F_{i-1,j}^{(n)}}{\delta x} + + \frac{G_{i,j}^{(n)} - G_{i,j-1}^{(n)}}{\delta x}\right) \quad (2.28)$$

,
$i = 1, \ldots, i_{max}, j = 1, \ldots, j_{max}$.

Puasson tənliyinin bütün oyuqlarda düzgün həlli üçün aşağıdakı sərhəd qiymətlərini bilmək tələb olunur:

$$\begin{aligned} &p_{0,j}, p_{i_{max+1},j}, j = 1, \ldots, j_{max}, \\ &p_{i,0}, p_{i,j_{max+1}}, i = 1, \ldots, i_{max}, \\ &F_{0,j}, F_{i_{max+1},j}, j = 1, \ldots, j_{max}, \\ &G_{0,j}, G_{i_{max+1},j}, j = 1, \ldots, j_{max}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Onlar bu şəkildə verilir:

$$\begin{aligned} &p_{0,j} = p_{1,j}, p_{i_{max+1},j} = p_{i_{max},j}, j = 1, \ldots, j_{max}, \\ &p_{i,0} = p_{i,1}, p_{i,j_{max+1}} = p_{i,j_{max}}, i = 1, \ldots, i_{max}, \\ &F_{0,j} = u_{1,j}, F_{i_{max+1},j} = u_{i_{max},j}, j = 1, \ldots, j_{max}, \\ &G_{i,0} = v_{i,1}, G_{i,j_{max+1}} = v_{i,j_{max}}, i = 1, \ldots, i_{max} \end{aligned} \quad (2.30)$$

.

(2.29) Puasson tənliyi yuxarıda hesablanmış (2.31) sərhəd qiymətlərinə uyğun olaraq modifikasiya olunmalıdır. Bundan sonra tənlik bu şəkildə yazılır:

$$\frac{\epsilon_i^E\left(p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}\right) - \epsilon_i^W\left(p_{i,j}^{(n+1)} - p_{i-1,j}^{(n+1)}\right)}{(\delta x^2)} + + \frac{\epsilon_j^N\left(p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}\right) - \epsilon_j^S\left(p_{i,j}^{(n+1)} - p_{i,j-1}^{(n+1)}\right)}{(\delta y^2)} = \frac{1}{\delta t}\left(\frac{F_{i,j}^{(n)} - F_{i-1,j}^{(n)}}{\delta x} + + \frac{G_{i,j}^{(n)} - G_{i,j-1}^{(n)}}{\delta x}\right) \quad (2.31)$$

,
$i = 1, \ldots, i_{max}, j = 1, \ldots, j_{max}$;

burada

$$\epsilon_i^W = \begin{cases} 0, i = 1 \\ 1, i > 1 \end{cases}; \qquad \epsilon_i^E = \begin{cases} 1, i < i_{max} \\ 0, i = i_{max} \end{cases};$$

$$\epsilon_j^S = \begin{cases} 0, j = 1 \\ 1, j > 1 \end{cases}; \qquad \epsilon_j^N = \begin{cases} 1, j < j_{max} \\ 0, j = j_{max} \end{cases}.$$

(2.32) düsturu i_{max} tənlikdən və j_{max} məchuldan ibarət olan sistemdir, bu sistemin matrisi p_{ij}, $i = 1, \ldots, i_{max}$, $j = 1, \ldots, j_{max}$. Qauss üsulu xətti tənliklər sisteminin həllinə tətbiq olunan üsullardan biridir, lakin bu üsul nadir hallarda hesablama hidrodinamikasının məsələlərinin həllində istifadə olunur. Hal-hazırda ədədi üsullarda tez-tez iterasiya üsulları tətbiq edilir. Xüsusi halda, bu bölmədə tərs relaksasiya üsulundan istifadə olunur.

Tutaq ki, n sayda xətti tənliklərdən ibarət olan sistem verilmişdir:

$$Ax = b; \quad (2.32)$$

burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A matrisi D – baş diaqonala, U və L - yuxarı və aşağı üçbucaq matrislərə bölünə bilər:

$$A = D + L + U; \quad (2.33)$$

burada

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Beləliklə, xətti tənliklər sistemini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$(D + \omega L)x = \omega b - (\omega U + (\omega - 1)D)x \quad (2.34)$$

burada $\omega \in [0, 2]$ – relaksasiya amilidir, sabitdir, onu A matrisinin əmsallarından asılı olaraq seçirlər. Hesablama hidrodinamikası məsələləri üçün $\omega = 1{,}7$ qiymətindən istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Tərs relaksasiya üsulunun əsas məğzi ondan ibarətdir ki, həll iterasiya vasitəsilə axtarılır. Birinci iterasiya üçün x vektorunun qiymətlərinin başlanğıc qiymətləri götürülür. Puasson tənliyinin həllinin axtarılması məsələsinə tətbiq olunan təzyiqlərin qiyməti hər bir oyuqda dəniz səviyyəsindəki atmosfer təzyiqinə bərabər qəbul oluna bilər ($101325\ Pa$). Hər bir sonrakı iterasiya üçün təzyiqin qiyməti aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$p_{i,j}^{it+1} = (1-\omega)p_{i,j}^{it} + \frac{\omega}{\left(\frac{\epsilon_i^E+\epsilon_i^W}{(\delta x)^2}+\frac{\epsilon_j^N+\epsilon_j^S}{(\delta y)^2}\right)} \times$$
$$\times \left(\frac{\epsilon_i^E p_{i+1,j}^{it}+\epsilon_i^W p_{i-1,j}^{it+1}}{(\delta x)^2} + \frac{\epsilon_j^N p_{i,j+1}^{it}+\epsilon_j^S p_{i,j-1}^{it+1}}{(\delta y)^2} - rhs_{i,j}\right) \qquad (2.35)$$

;

$$i = 1, \dots, i_{max}, j = 1, \dots, j_{max};$$

burada $rhs_{i,j}$ – (i,j) oyuğu üçün (2.32) Puasson tənliyinin sağ tərəfidir.

Hər bir iterasiya zamanı hesablamaların uyğunsuzluğu (nevyazka, residual) bu düstur vasitəsilə hesablanır:

$$r^{it} = \frac{1}{i_{max} j_{max}} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{j=1}^{j_{max}} \left(r_{i,j}^{it}\right)^2\right)} \qquad (2.36)$$

burada $r_{i,j}^{it}$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$r_{i,j}^{it} = \frac{\epsilon_i^E\left(p_{i+1,j}^{it}-p_{i,j}^{it}\right)-\epsilon_i^W\left(p_{i,j}^{it}-p_{i-1,j}^{it}\right)}{(\delta x)^2} + \frac{\epsilon_j^N\left(p_{i,j+1}^{it}-p_{i,j}^{it}\right)-\epsilon_j^S\left(p_{i,j}^{it}-p_{i,j-1}^{it}\right)}{(\delta y)^2} - - rhs_{i,j}, \qquad (2.37)$$

İterasiya prosesinin dayanmasından ötrü iki şərt vardır:

1. iterasiyaların maksimal sayının artırılması: $it > it_{max}$;
2. hesablamaların uyğunsuzluğunun verilmiş eps dəqiqlik tərtibinə çatması:

$$r^{it} < eps.$$

Nəticə

Bir nümunə üzərində aparılmış araşdırmalar nəticəsində fənlərarası inteqrasiyanın aşağıdakı üstün cəhətlərini göstərmək olar:

1) qoyulmuş məsələ haqqında məlumatlar elə səviyyədə verilməlidir ki, problemin nəzəriyyəsinin yaradılmasına kifayət etsin;

2) tədqiq olunan problemin riyazi modeli qurulur və bu problemin həllinə hansı ədədi üsulun tətbiqi müəyyənləşdirilir;

3) dərs prosesində tələbə "Ədədi üsullar" fənni ilə digər fənlərin birbaşa əlaqəsinin şahidi olur və onda baxılan məsələnin həlli haqqında bilik və bacarıqlar formalaşır.

Problemin aktuallığı. Fənlərarası inteqrasiya tədris prosesinə çoxdan tətbiq olunmasına baxmayaraq, hələ də aktualdır. Elm və texnologiyanın sürətlə inkişafı bir çox elm sahələrinin inteqrasiyasını daha da genişləndirmişdir. Ona görə də müasir tələbə və magistrlər gələcəkdə fəaliyyət göstərəcəkləri elm sahələrini seçdikdə fənlərarası əlaqədən yararlanmağı bacarmalıdırlar.

Problemin elmi yeniliyi. "Ədədi üsullar" fənni ali məktəblərdə əsasən son kurslarda tədris olunur. Tələbələr əvvəlki kurslarda baza fənlərində öyrəndikləri bilikləri "Ədədi üsullar" fənninin mövzularına uyğunlaşdırmalı və baxılan məsələnin ədədi nəticələrini almalıdırlar. Təqdim olunan məqalənin elmi yeniliyi ondan ibarətdir ki, burada ilk dəfə "Hesablama hidrodinamikası" elmi ilə "Ədədi üsullar" fənninin inteqrasiyası əyani olaraq nümayiş olunmuş, hər iki elm sahəsinə aid olan üsul və düsturların bir-biri ilə bağlılığı göstərilmişdir.

Problemin praktiki əhəmiyyəti. Fənlərarası inteqrasiyanın elm və tədrisdə istifadə olunması həm gənc alimlərdə, həm də magistr və tələbələrdə yeni dünyagörüşü formalaşdırır. Belə ki, onlar təkcə məşğul olduqları və öyrəndikləri elm sahələri ilə kifayətlənməməli, həmçinin bu sahə ilə əlaqəsi olan digər elm sahələri ilə də tanış olmalı və müəyyən məlumata malik olmalıdırlar.

Ədəbiyyat:

1. Bhaskaran Rajesh, Collins Lance Introduction to CFD Basics.

2. Freistauer M Chapter 1. Basic Equations // Finite Volume and Finite Element Methods in CFD. — Pargue: Charles University, -2007.

3. Foias C, Manley O, Rosa R, Temam R Navier-Stokes Equations and Turbulence. — Cambridge: Cambridge University Press, -2001.

4. Griebel Michael, Dornseifer Thomas, Neunhoeffer Tilman Numerical Simulation in Fluid Dynamics. — Society for Industrial and Applied Mathematics, -1998.

5. Smith Richard Laminar vs Turbulent Flow Over Airfoils // Symscape - Computational Fluid Dynamics Software for All. 2014. http://www.symscape.com/blog/laminar-vs-turbulent-flow-over-airfoils.

6. Falkovich Gregory Fluid Mechanics. A Short Course for Physicists. — Cambridge: Cambridge University Press, -2011.

7. Fefferman C. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation // Clay Millenium Problems. — 2000.

8. Stam Jos Proceedings of the Game Development Conference // Real-Time Fluid Dynamics for Games. — 2003.

9. Stoer J, Bulirsch R Introduction to Numerical Analysis. — Berlin: Springer-Verlag, -1980.

E-mail: laura_fat@rambler.ru,
nzkt.0304@mail.ru

Rəyçilər: *fiz.riy.ü.elm.dok., prof., AMEA-nın müxbir üzvü* **V.R. İbrahimov**
fiz.riy.ü.fəls.dok., dos. **N.İ. Fomina**
Redaksiyaya daxil olub: 23.09.2021.