UOT 372.851.4

Səməd Məmməd oğlu Çərkəsov
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin
Quba filialının riyaziyyat müəllimi

İSBAT MƏSƏLƏLƏRİ HƏLLİNİN AXTARILMASI YOLLARI

Самед Мамед оглы Чаркасов
учитель математики Губинского филиала
Азербайджанского Государственного Педагогического Университета

СПОСОБЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМИ

Samad Mammad Charkasov
teacher of mathematics of the Guba branch of the
Azerbaijan State Pedagogical University

METHODS FOR SEARCHING SOLUTION TO PROBLEMS WITH PROOFS

Xülasə. Riyaziyyat təliminin ilk mərhələlərində şagirdlərin teorem, onun şərtləri və nəticəsi haqqında təsəvvürləri aydın deyildir. Ona görə də teoremin isbatı prosesini dərk edə bilmək üçün isbat üsullarını bilmək zəruridir. Məqalədə isbat məsələlərinin şərti və nəticəsini əlaqələndirməyin bir neçə üsulları, onların əlaqələri və fərqli tərəfləri nümunələrlə izah olunmuşdur.
Açar sözlər: *riyaziyyat, teorem, isbat, məsələ, analiz, sintez, analitik-sintetik*

Резюме. В начальной стадии обучения математике ученики не имеют ясного представления о теореме, её условиях и результате. Поэтому, чтобы понять процесс доказательства теоремы, необходимо знать методы его доказательств. В статье излагаются некоторые методы согласования условий и результатов доказательства задач, на основе примеров объясняется их связи и различные стороны.
Ключевые слова: *математика, теорема, доказательство, задача, анализ, синтез, аналитико-синтетический*

Summary. At the initial stage of teaching mathematics, students do not have a clear idea of the theorem, its conditions and the result. Therefore, in order to understand the process of confirming a theorem, it is necessary to know the methods of confirming it. The article explains some of the methods of linking the condition and the result of confirmation questions, with examples explaining their relationship and various aspects.
Key words: *mathematics, theorem, proof, problem, analysis, synthesis, analytic-synthetic*

İsbat məsələləri həllinin axtarılması yolları. Məsələni həll etmək üçün onun şərtləri və nəticəsini əlaqələndirməyə imkan verən aralıq şərtlərin seçilməsi zəruridir. Aralıq faktların seçilməsi mürəkkəb işdir və çox vaxt onu intuisiya, düşüncə üzrə aparmaq lazım gəlir. Bu, yaradıcı iş olduğundan onu hansısa mexaniki, trafaret qaydalara gətirmək doğru deyildir. Bununla yanaşı, bu o demək deyildir ki, aralıq faktlar sırf təsadüfi xarakter daşıyır. Belə ki, onun müəyyən məqsədi vardır; aralıq faktlar ardıcıl olaraq şərt və nəticəni birləşdirməlidir və vahid tam şəkildə özünü göstərməlidir.

Metodik baxımdan həllin axtarılması üzərində işin ayrı-ayrı məqamlarının nəzərdən keçirilməsi üzərində dayanaq.

1. Əvvəlcə, məsələ ifadə edildikdə şagirdlərə təklif etmək lazımdır ki, onu anlasınlar, məzmununu başa düşsünlər. Bunun üçün şagirdlərin aydın şəkildə məsələnin şərti və nəticəsini ayırmaları zəruridir. Bunsuz məsələnin həlli haqqında söhbət ola bilməz. Əyani vəsaitlər, ilk növbədə, çertyoj burada əvəzsiz xidmət göstərə bilər.

Məsələyə aid çertyoj şagirdlərə hazır verilə bilər və ya onların özlərinin çertyoju hazırlamasını təklif etmək olar. Hazır çertyojları ilk mərhələlərdə, vaxta qənaət etmək məqsədi ilə məsələnin şifahi həllində tətbiq etmək tövsiyə olunur. Çertyojda həm şərtin, həm də nəticənin bütün elementləri (faktları) təsvir olunmalıdır. Çertyojdan istifadə edilməsində böyük diqqətliliyə nail olmaq zəruridir. Ona görə də, mümkün qədər erkən çertyoj alətlərindən istifadə etməklə əsas qurma məsələlərini şagirdlərə öyrətmək arzu olunur.

Çertyoj mümkün qədər məsələnin məzmununu əyani əks etdirməlidir. Şagirdlərin çox vaxt meyl etdiyi xüsusi hallardan çəkinmək lazımdır. Fiqurun ayrı-ayrı elementləri (üçbucağın tərəfləri, hündürlükləri, medianları və ya paraleloqramın tərəfləri və i.a.) biri-birindən kəskin fərqləndikdə belə çertyojlar əyani olacaqlar.

Şagirdlərə belə bir fikir aşılanmalıdır ki, çertyoj hələ məsələnin həlli deyildir. Onda yalnız bir xüsusi hal göstərilmişdir. Çertyoj yalnız əyani vəsaitdir.

Şərt və nəticənin ayrılan faktları çertyoj əsasında qısa, simvolik yazılmalıdır. Qeyd etmək lazımdır ki, sonrakı işlərdə onlardan istifadə olunacaqdır.

2. Bundan sonra məsələdə şərt və nəticə arasında əlaqənin nə qədər sıx olması təsdiq olunur ki, şərtlər yerinə yetirildikdə, nəticənin faktları da hökmən doğru olacaqdır. Təklif olunan məsələdə bu axtarılan əlaqəni göstərmək və həllin axtarılmasına keçmək lazımdır.

Birinci belə bir sual qoyulur: "Öyrənilən əlaqə bəlkə artıq bizə məlumdur? Hansı məlum teoremdə o göstərilmişdir? Bu suallara müsbət cavab verdikdə məsələni həll olunmuş hesab etmək olar."

Nümunə üçün aşağıdakı məsələni nəzərdən keçirək.

Məsələ. "Üçbucaqda bir təpədən çəkilən hündürlüyün mediandan kiçik (və ya bərabər) olduğunu isbat edin."

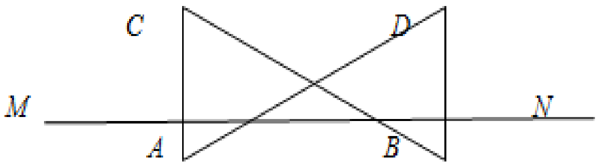
Burada hündürlük və median arasındakı əlaqə bizə məlumdur, belə ki, eyni bir nöqtədən çəkilən perpendikulyar və mail haqqında teoremin tətbiqinin yalnız xüsusi halı göstərilir.

Belə məsələlər çox sadədir və onlardan çəkinmək doğru deyildir. Onlar şagirdlərə nəzəri materialı müxtəlif fiqurlara tətbiq etməyi öyrədir.

3.Əgər birinci suala müsbət cavab verilməzsə, onda isbat üçün aralıq faktlar daxil etmək lazım gəlir. Şagirdlərə ilk vaxtlarda aralıq faktlar haqqında danışmaq məqsədəuyğun deyildir. Yaxşı olar ki, şagirdlərin diqqəti çertyojda əmələ gələn sadə fiqurlara yönəldilsin, bu fiqurların xassələri yada salınsın və ya onlar öz aralarında müqayisə edilsin. Çertyojun elementlərinin müqayisə edilməsi çox vaxt məsələnin həllini göstərir.

Məsələ. "Düz xəttə onun iki müxtəlif *A* və *B* nöqtələrindən bu düz xətdən bir tərəfdə bir-birinə bərabər *AC* və *BD* perpendikulyarları qaldırılmışdır, *AD=BC* olduğunu isbat edin."

Çertyoju yerinə yetirdikdən sonra qeyd etmək lazımdır ki, məsələ *AD* və *BC* parçalarının müqayisə edilməsinə gətirilir.

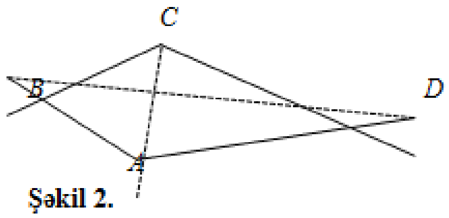


Şəkil 1.

Belə suallar verilir: "Hansı fiqurları burada nəzərdən keçirə bilərik? Müqayisə etdiyimiz *AD* və *BC* parçaları hansı sadə fiqurlara daxildir?" Şagirdlər çətinlik çəkmədən bu suallara cavab verirlər: "*AD* və *BC* parçaları *ADB* və *BCA* üçbucaqlarına daxildir". Təbii olaraq belə fikir yaranır ki, *AD* və *BC* parçalarını müqayisə etmək üçün *ADB* və *BCA* üçbucaqlarını müqayisə etmək lazımdır. Bu müqayisə aparılan iş onların bərabərliyinə gətirilir ki, bu da asanlıqla məsələnin həllinə gətirilir. Yəni, nəticədə faktın doğru olduğunu təsdiq edirik.

Bəzən müqayisə edilən elementlərin daxil olduğu sadə fiqurlar çertyojda görünmür. Onda çertyojda elə köməkçi xətlər çəkmək lazım gəlir ki, həmin sadə fiqurlar alınsın. Burada hansısa hazır qaydalar göstərmək çətindir, bunun üçün şagirddən düşüncə və yaradıcılıq tələb olunur. Aşağıdakı məsələni nəzərdən keçirək:

Məsələ. "Əgər qabarıq *ABCD* dördbucaqlısında *AB=BC* və *CD=DA* tərəfləri bərabər olarsa, onda $\angle A=\angle C$ olar. İsbat edin." Burada köməkçi xətt kimi *BD* diaqonalını çəkmək yaxşı olar. Onda çertyojda *ABD* və *BCD* üçbucaqları alınır. (şəkil 2)



Şəkil 2.

Müqayisə etdiyimiz *A* və *C* bucaqlarının bir element kimi bu üçbucaqlara daxil olması da çox əhəmiyyətlidir. Həmin üçbucaqların məlum elementlərini müqayisə etdikdə üçbucaqların bərabərliyinin üçüncü əlamətinə görə onların bərabər olduğunu müəyyən edirik. Buradan bilavasitə $\angle A=\angle C$ olur və bununla da məsələ həll edilir.

Dördbucaqlıda *BD* diaqonalı əvəzinə *AC* diaqonalını da çəkmək olardı. Bu halda iki bərabəryanlı *ABC* və *CDA* üçbucaqları alınardı. Dördbucaqlının müqayisə edilən *A* və *C* bucaqları iki bucağın cəmi şəklində göstərilir. Asanlıqla göstərmək olar ki, *A* bucağının toplananları uyğun olaraq *C* bucağının toplananlarına bərabərdir. Buradan da *A* və *C* bucaqlarının bərabərliyi alınır.

Köməkçi xətlərin çəkilməsi priyomu çox vaxt məsələnin həllinə kömək edir, ona görə də şagirdləri onunla isbat məsələləri həllinin ilk pillələrində tanış etmək faydalıdır.

4. Bir neçə aralıq faktların daxil edilməsi lazım gələn daha mürəkkəb məsələlərdə işin çətinliyi həmin faktların məqsədəuyğun seçilməsindən ibarətdir. Aralıq faktlar müəyyən ardıcıllıqla yerləşməli və onların birindən növbətiyə keçidin məlum əlaqələr əsasında bilavasitə, sadə və aydın baş verməsi vacibdir. Bundan başqa faktların əlaqələndirilməsi zəncirinin öz istiqaməti, öz məqsədi olmalı, şərt və nəticə arasındakı əlaqəni yoxlamalı, müəyyən etməli, aydınlaşdırmalıdır. Aralıq faktların (əqli nəticələrin, çıxarılışların) əlaqələndirilməsinin belə zəncirinin qurulması işini iki şəkildə təşkil etmək olar:

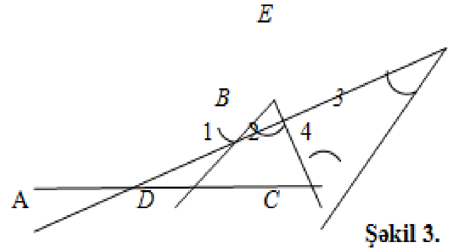
1) ya şərtlərdən başlamaq;

2) və ya da nəticənin faktlarından başlamaq olar.

Birinci üsula *sintetik,* ikinci üsula isə *analitik ü*sul deyilir.

Çıxarışlar zənciri məsələnin ifadəsindən alınarsa və ya bu zəncir asanlıqla açılarsa, onda sintetik üsuldan istifadə etmək faydalıdır. Misal göstərək.

Məsələ. *ABC* üçbucağında *C* təpə nöqtəsindən üçbucağın *B* bucağının *BD* tənböləninə paralel çəkilən *CE* düz xətti *AB* tərəfinin uzantısını *E* nöqtəsində kəsir. *BE=BC* olduğunu isbat edin.



Şəkil 3.

Çertyojda üçbucağın *B, C* və *E* təpələrindəki bucaqları sadəlik üçün 1,2,3,4 rəqəmləri ilə işarə edək. Həmin bucaqları müqayisə edək. (şəkil 3)

1) BD parçasının *B* bucağının tənböləni olması şərtindən $\angle 1=\angle 2$ alınır.

2) CE//BD şərtindən *BC* kəsən olduqda $\angle 2=\angle 4$ (çarpaz bucaqlar kimi) aparılır.

3) CE//BD şərtindən *BC* kəsən olduqda $\angle 1=\angle 3$ (uyğun bucaqlar kimi) alınır.

4) Əvvəlki aralıq faktlardan alınır ki, $\angle 3=\angle 4$.

5) $\angle 3$ və $\angle 4$-ə *BEC* üçbucağının bucaqları kimi baxaraq *BE=BC* olduğunu alırıq.

Sintetik üsulla işlədikdə bizi yalnız nəticəyə yaxınlaşdıran aralıq faktları (çıxarılışları) götürmək faydalıdır. Məsələn, əvvəlki məsələdə $\angle ADB=\angle ACE$ olduğunu müəyyən etmək olardı. Lakin məsələnin həlli üçün onun faydası yoxdur. Sintetik üsulla həllin axtarılması zamanı nəticəni (son məqsədi) unutmaq doğru deyildir. Belə ki, məqsədə yaxınlaşmaq üçün hansı çıxarışları götürmək lazım gəldiyinə o göstəriş verməlidir. Belə qabiliyyəti həmişə şagirdlərdə tərbiyə etmək zəruridir. Şagirdlərin diqqəti adətən dayanıqlı olmur, düzgün mühakimə aparmağa başlayaraq, bəzən məqsəddən yayınır və düzgün olmayan yolu tutur.

5. Çox vaxt isbatın gedişi məsələnin ifadəsi ilə göstərilmir və ya gediş güman etmə ilə fərziyyə ilə asanlıqla aşkar edilmir. Bu halda isbatın tapılmasının analitik ΔΔüsulundan istifadə etmək daha faydalıdır. Yəni, isbatın gedişində aralıq faktlar zəncirinin qurulmasına nəticədən başlamaq əlverişlidir. Misal göstərək.

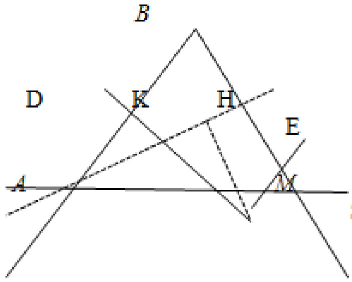
Məsələ. Bərabəryanlı üçbucaqda oturacağın istənilən nöqtəsindən yan tərəflərə qədər məsafələrin cəmi sabit kəmiyyətdir (o, üçbucağın yan tərəfinə çəkilən hündürlüyə bərabərdir). İsbat edin.

Məsələyə aid çertyoj quraq.

1) ΔABC – bərabəryanlıdır, AB=BC.

2) M nöqtəsindən ME□BC və MD□AB çəkilmişdir.

3) AH – yan tərəfə çəkilən hündürlükdür (şəkil 4).



Şəkil 4.

İşə nəticədən başlayaraq: nəyi isbat etmək tələb olunur? (cavab: MD+ME=AH) Nəticə əvvəllər müəyyən olunmuş teoremlərə əsasən şərtin sadə, aşkar nəticəsi deyildir? (cavab: xeyir, nəticəsi deyildir).

Belə faktın varlığını əvvəllər biz necə isbat etmişik, indi isə necə isbat etmək olar? (cavab: AH parçasının uyğun olaraq MD və ME parçalarına bərabər olan iki parçaya ayırmağın mümkünlüyünü göstərmək kifayətdir). M nöqtəsindən MK//BC çəkərək AH parçası üzərində HK=ME ayırmaq olar. İndi nəticəni təsdiq etmək üçün bizdə verilənlər kifayətdirmi? Əgər kifayət deyildirsə, onda bəs nə çatışmır? (Cavab: AK=MD olduğunu təsdiq etmək çatmır). Çatışmayan şərtin varlığına necə inanmaq olar? (Cavab: AK və MD parçalarını müqayisə etmək üçün qeyd edək ki, onlar AKM və ADM üçbucaqlarının tərəfləridir. Bu üçbucaqları müqayisə edək: onların hər ikisi düzbucaqdır və ortaq hipotenuzları var. AK və MD parçalarının bərabər olması üçün AKM və AMD üçbucaqlarının bərabər olması zəruridir).

Yuxarıda göstərilən (ADM və AKM) düzbucaqlı üçbucaqların bərabərliyini təsdiq etmək üçün verilənlər kifayətdirmi? (Cavab: kifayət deyildir. Bu üçbucaqda daha bir elementin bir iti bucağın və ya bir katetin bərabər olduğunu isbat etmək lazımdır).

Bu üçbucaqlarda daha bir elementin bərabərliyini necə isbat edək. (Cavab: DAM və KMA iti bucaqlarını müqayisə etmək asandır. Belə ki, ∠KMA = ∠BCA (BC//KM və AC kəsən olduğundan uyğun bucaqlar kimi) və ∠BCA = ∠BAC (bərabəryanlı ABC üçbucağının oturacağına bitişik bucaqlar kimi) olmasından ∠DAM = ∠KMA alınır).

Beləliklə, sonuncu çatışmayan şərti aldıq. Ona görə AK=MD olur. Bu isə bizim əvvəl müəyyən etdiyimiz kimi nəticə faktının varlığını isbat edir, yəni məsələni həll edir.

İsbatın axtarılmasının analitik üsulu bir çox hallarda sintetik üsuldan daha səmərəlidir. Analitik üsul isbatın qurulması yolunu şagirdlərə göstərir, işə axıcılıq və məqsədyönlülük gətirir, hər bir addımı əsaslandırmağa imkan verir. Bununla da öyrənilən materialın formal mənimsənilməsinə deyil, aydın başa düşülməsinə nail olunur. Analitik üsul şagirdlərdə təfəkkürün inkişaf etdirilməsi üçün böyük əhəmiyyətə malikdir.

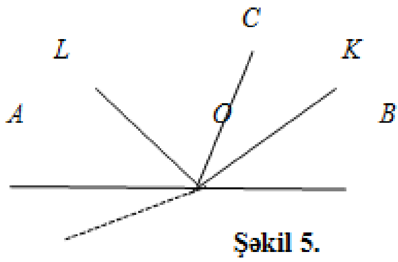
6. İsbatın axtarılmasında təriflər böyük kömək göstərə bilər. Belə ki, bir neçə dəfə aşağıdakı sualı verməli oluruq: müəyyən faktın varlığını necə isbat etməli? Suala cavab vermək üçün təbiidir ki, əvvəlcə aşağıdakı sual əhatə olunmalıdır. Onun varlığını təsdiq etmək üçün bu faktın hansı əlamətləri kifayətdir? Bu suala cavabı birinci növbədə faktın özünün tərifi verə bilər.

Tərifdə tərifi verilən faktın mühüm əlamətləri sadalanır. Bununla da işə istiqamət verilir: nəzərdən keçirilən məsələdəki tərifdə göstərilən mühüm əlamətlərin olması yoxlanılır. Misal göstərək.

Məsələ. İki qonşu bucağın tənbölənlərinin perpendikulyar olduqlarını isbat edin.

Şəkil 5-də AOC və COB – qonşu bucaqlardır, OL □OK olduğunu isbat etmək lazımdır.

Əvvəlcə aşağıdakı kimi sual veririk: hansı düz xətlərə perpendikulyar düz xətlər deyilir? (Cavab. Tərifə görə düz bucaq altında kəsişən iki düz xəttə perpendikulyar düz xətlər deyilir).



Şəkil 5.

Daha sonra belə bir sual verilir: hansı bucaqlara düz bucaq? Cavab. Tərifə görə iki bərabər qonşu bucaqlardan hər birinə düz bucaq deyilir. Ona görə məsələni həll etmək üçün ∠OK bucağı ilə qonşu olan ∠OM bucağını qurmaq lazımdır. Buna görə də OK tərəfini uzadırıq. Alınan ∠OK və ∠OM bucaqlarını müqayisə edirik.

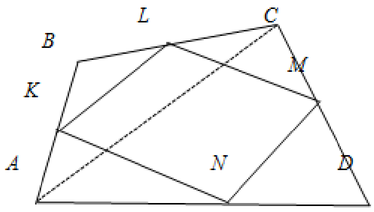
Aydındır ki,

∠LOK = ∠LOC + ∠COK və ∠LOM = ∠LOA + ∠AOM

Yazmaq olar. Bu yazıların sağ tərəfində birinci toplananlar bərabərdir. (∠LOC = LOA; şərtə görə LO düz xətti AOC bucağı tənböləndir). İkinci toplananlar da bərabərdir, belə ki, ∠AOM = ∠BOK – qarşılıqlı bucaqlar kimi və ∠COK = ∠BOK – şərtə görə. Deməli, bərabərsizliklərin sol tərəfləri də bərabərdir, yəni ∠LOK = ∠LOM. Bunun da isbatı tələb olunurdu.

Məsələ. Düzbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrini ardıcıl olaraq birləşdirən parçaların paraleloqram əmələ gətirdiyini isbat edin.

Şəkil 6-da ABCD – verilmiş dördbucaqlı; K, L, M və N – tərəflərin orta nöqtələridir. KLMN-in paraleloqram olduğunu isbat etmək lazımdır.



Şəkil 6.

Məsələni həll etmək üçün: paraleloqramın hansı əlamətləri vardır? Sualından başlayaq. (Cavab. Tərifə görə qarşı tərəfləri cüt-cüt paralel olan dördbucaqlıya paraleloqram deyilir). Buradan məsələni həll etmək üçün KL//MN və KN//LM olduğunu müəyyən etməyin kifayət olması alınır. Əvvəlcə KL//MN olduğunu müəyyən edək. Burada söhbət KL və MN düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətindən gedir. KL parçası AB və BC tərəflərinin orta nöqtələrini birləşdirir. Ağla belə bir fikir gəlir ki, A və C nöqtələrini AC parçası ilə birləşdirək. Orta xətti KL olan ABC üçbucağı almış olarıq ki, KL//AC olar. Analoji mühakimə MN//AC nəticəsinə gətirir. İndi KL və MN düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətlərini müqayisə etmək asandır. Paralelliyin tranzitivlik xassəsinə əsasən KL//MN nəticəsini çıxarırıq. Məsələni həll etmək üçün bu nəticənin müəyyən edilməsi lazım idi.

Analoji olaraq KN//MN nəticəsini çıxarırıq ki, bununla da məsələ həll olunur.

Problemin elmi yeniliyi. Həndəsə məsələlərini həll etmək üçün onun şərtləri və nəticəsi arasında mühakimələr zəncirindən istifadə olunmuşdur.

Problemin aktuallığı. Məsələlər həllinin məntiqi əsaslandırılması şagirdlərdə düşüncəni artırır, onları axtarışa, yaradıcılığa istiqamətləndirir və son nəticədə onları fəal fəaliyyətə təhrik edir.

Problemin praktik əhəmiyyəti. İsbat məsələləri həllinin axtarılması vərdişləri teoremlərin strukturunu mənimsəməyə və müxtəlif isbat üsullarına yiyələnməyə kömək edəcəkdir.

Ədəbiyyat:

1. Adıgözəlov, A.S. Məktəbdə riyaziyyat təliminin nəzəri əsasları / A.S. Adıgözəlov. -Bakı: ADPU,-2018. -310 s.
2. Adıgözəlov, A.S. Orta məktəbdə riyaziyyatın tədrisi metodikası. Dərs vəsaiti / A.S. Adıgözəlov. -Bakı: ADPU, -2015. -350 s.
3. Ağayev, B. Səkkizillik məktəbdə riyaziyyatın tədrisi metodikası. IV h. / B. Ağayev, Ə. İbrahimov, A. Kreymer. -Bakı: Maarif, -1972, -230 s.
4. Барыбин, К.С. Сборник геометрических задач на доказательство. -М: Просвпещение, -1954. -152 с.
5. Болтянский, В.Т. Анализ – поиск решения задач // Математика в школе, -1974, №1, -с.43-48.
6. Mərdanov, M.C. Həndəsə: Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün dərslik / M.C. Mərdanov, S.S. Mirzəyev, S.M.Sadıqov. -Bakı: Çaşıoğlu, -2005. -160 s.
7. Mərdanov, M.C. Həndəsə: Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün dərslik / M.C. Mərdanov, S.S. Mirzəyev, R.H. Hacıyev [və b]. -Bakı: Çaşıoğlu, -2005. -160 s.
8. Столяр, А.А. Педагогика математики: Курс лекций / А.А. Столяр. -Минск: Высшая школа, -1969, -368 с.
9. Туманов, Е.И. Поиски решения задачи: Пособие для учителей / Е.И. Туманов. -М.: Просвещение, -1969. -279 с.

E-mail: çərkəssəm@.com

Rəyçilər: *ped.ü.elm.dok., prof.* **A.S. Adıgözəlov,**
ped.ü.fəls. dok. **N.R. Abbasov**
Redaksiyaya daxil olub: 03.11.2021.