UOT 372.851

Novruz Baba oğlu Nəsirov
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin
Riyaziyyat və onun tədrisi texnologiyası kafedrasının dosenti,
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
https://orcid.org/0009-0000-8919-7855

Aynurə Şükür qızı Abduləzova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin
Riyaziyyat və onun tədrisi texnologiyası kafedrasının laborantı
https://orcid.org/0009-0002-1393-1050
https://doi.org/10.69682/azrt.2024.91(1).134-138

MƏKTƏB RİYAZİYYAT KURSUNDA İSBAT MƏSƏLƏLƏRİ VƏ ONLARIN HƏLLİ ÜSULLARI

Новруз Баба оглы Насиров
доцент кафедры Математика и технология ее преподавания
Азербайджанского Государственного Педагогического Университета,
доктор философии по педагогике,

Айнура Шюкюр гызы Абдулазова
лаборант кафедры Математики и технология ее преподавания
Азербайджанского Государственного Педагогического Университета

ЗАДАЧИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Nasirov Nowruz Baba
associate professor of the Mathematics and its teaching technology department
of Azerbaijan State Pedagogical University
doctor of philosophy in pedagogy

Aynura Shukur Abdulazova
laboratory assistant of Mathematics and its teaching technology department
of Azerbaijan State Pedagogical University

THE ROLE OF PROBLEMS IN MATHEMATICS TEACHING

Xülasə. Məqalədə, riyaziyyatdan isbat məsələləri, onların həllinin öyrədilməsinin riyaziyyat təlimindəki rolu və əhəmiyyəti araşdırılmışdır. Məqalədə istər cəbri, istərsə də həndəsə məzmun xətti üzrə isbat məsələlərinə baxılmışdır. Həmçinin sözü gedən isbat məsələlərinin şagirdlərə asan tədris edilməsi üçün bir neçə üsul və metodların adı çəkilərək, izahı verilmişdir. eyni zamanda bu deyilənlər məqalə daxilində məsələ və misallar üzərində daha aydın və alqoritmik şəkildə izahla öz əksini tapmışdır.
Açar sözlər: *məsələ, isbat, təlim, analiz, sintez*

Резюме. В статье исследованы роль и значение задач на доказательство при преподавании математики и обучение их решению. Автором рассмотрены задачи на доказательство как по содержательной линии алгебры, так и геометрии. Помимо этого, упоминаются и объясняются несколько способов и методов, позволяющих легко обучать учащихся упомянутым задачам на доказательства.
Ключевые слова: *задача, доказательство, обучение, анализ, синтез*

Summary. In the article, the role and importance of teaching mathematics proof issues, their solution in mathematics education is investigated. In the article, both algebraic and geometry proof issues were considered. Also, several methods and methods are mentioned and explained for teaching the mentioned proof issues to the students easily. at the same time, these things are explained more clearly and algorithmically on the issues and examples within the article.

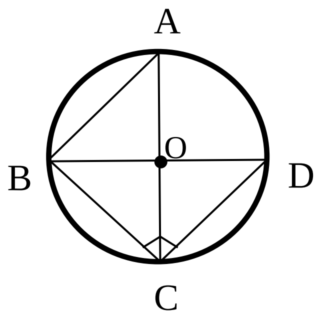
Key words: *problem, proof, training, analysis, synthesis*

Riyaziyyat tədrisi prosesində məsələ həlli, olduqca mühüm rola malikdir. Şagirdlərin ibtidai siniflərdən yuxarı siniflərədək onların təlimi, riyazi biliklərinin, bacarıq və vərdişlərinin yoxlanılmasında məsələ həlli əvəzedilməz üsullardan biridir. Məktəb riyaziyyat təlimində məsələlərin rolu danılmazdır. Bu bütün dövrlərdə belə olmuş və hazırki dövrdə təhsil islahatlarında əsas məsələlərdən biri şagirdlərdə müstəqil məsələ həll etmək bacarığı formalaşdırmaqdan ibarətdir. Bu məqsədlə respublikamızda yeni milli dərsliklərin yazılmasında məsələlərin tərtibi, müxtəlifliyi təhsil alanların əməli fəaliyyətə hazırlanması nöqteyi-nəzərdən diqqət mərkəzində saxlanılmışdır. Bu məsələlər içərisində məzmun və tələbinə görə isbat məsələlərinin ən mühüm funksiyası, şagirdləri yaradıcı fəaliyyətə yönləndirməkdir. Yaradıcı fəaliyyəti, onun məzmunu haqqında hazırki elmdə, müxtəlif ədəbiyyatlarda vahid bir fikir yoxdur. Lakin o da məlumdur ki, yaradıcı fəaliyyətin nəticəsində həmişə bir yenilik, yeni nəticə (yeni fakt, yeni üsul və s.) əldə edilir. Ona görə də müasir didaktikada yaradıcılığa sövq etməyin əsas keyfiyyətləri və şərtləri aşağıdakı şəkildə müəyyən edilmişdir: *1. Əldə edilmiş bilik, bacarıq və vərdişləri müstəqil olaraq yeni situasiyada tətbiq edə bilmək, 2. Məlum olan situasiyada yeni problemi müəyyən etmək, 3. Məlum olan obyektin yeni funksiyasını görmək. 4. İndiyə qədər məlum olan fəaliyyət üsullarından kombinə yolu ilə yeni üsulları seçmək. 5. Obyektin strukturunu görməyi bacarmaq, başqa sözlə obyekt haqqında qarşıya çıxan situasiyada, problemdə bu obyektin bütün elementlərini, onların arasındakı əsas və qeyri-əsas münasibətləri seçmək. 6. Mövcud obyekti və yaxud problemi hərtərəfli görmək, onun mümkün həlli yollarını, həllin digər müxtəlif üsullarını müəyyən etmək. 7. Problemin demək artıq yeni bir həll üsulunu tapmaq.*

İsbat məsələləri bu funksiyanın yerinə yetirilməsində mühüm rol oynayır. Məlumdur ki, hər hansı bir təklifin doğruluğunu göstərməyə isbat deyilir. Yaxud təklifin doğru olmadığını müəyyən edilib, göstərilməsinə təkzib deyilir. Təkzib edilməsi tələb olunan hökm isə tezis adlanır. Məlumdur ki, məntiq elmində təklifin isbatının altı qaydası göstərilir. Eyni zamanda bu iki anlayış arasında mövcud olan, yəni isbatla təkzib prosesindəki əsas səhvlər də burada qeyd edilir. Aydındır ki, yaranan bu səhvlər müəyyənləşdirilmiş isbat qaydalarına və məlum olan təkzib yollarına ciddi riayət etmədikdə baş verir. Bu kimi səhvlər aşağıdakılardan ibarət ola bilər: *1. Tezisi başqa birisi ilə əvəz edərkən baş verən səhvlər. 2. İsbatın aparılması prosesində baş verən səhvlər. 3. İsbatın gedişi zamanı ortaya çıxan bəzi səhvlər.* Bütün bunlar əsas olmaqla, riyaziyyat elminin özünəməxsus xüsusiyyətləri ilə əlaqədar olaraq məntiqi səhvlər də mövcuddur və bunlardan aşağıdakıları göstərmək olar: *1. Bəzi ümumi qaydaları, müstəsna hallara tətbiq edərkən olan səhvlər. 2. Anlayışın tərifinin, onun induktiv təsəvvürü ilə əvəz edilməsi prosesində ortaya çıxan səhvlər. 3. Fiqurun çertyojunun təsviri ilə meydana çıxan səhvlər. 4. Növ və cins anlayışının xassələrini, birinin digərinə aid edilməsi ilə yaranan səhvlər. 5. Anlayışın xassələrinin və məlum qaydaların qısa şəkildə ifadə edilməsi zamanı yaranan səhvlər və s.* Riyazi məsələləri həll edərkən bəzən sadə məsələlərin həllindən ümumiləşdirərək bu tip mürəkkəb məsələlərin ümumi həlli alınır. Bəzən isə ümumi alınan məsələlərin özlərinin isbatı tələb olunur. Fikrimizi sadə bir məsələ üzərində izah edək.

Məsələ: Perimetri $2a$ olan verilmiş düzbucaqlılar içərisində sahəsi ən böyük olan düzbucaqlının kvadrat olduğunu isbat edin. (yaxud iki müsbət ədədin cəmi a olarsa, onda bu ədədlərin hasili o zaman böyük olar ki, həmin vuruqlar bir-birinə bərabərdir).

Hər hansı bir təklifin doğruluğunun isbatı məntiqi mühakimə prosesidir. Bir çox məsələlər vardır ki, onun isbatını şagird mühakimə yolu ilə əldə edir. Bu öyrənilən anlayış daha yadda qalan olur. Məsələn, şagirdə sual verilir: İstənilən qabarıq n-bucaqlının xarici bucaqlarının cəmi neçə dərəcədir? Şagird qabarıq n-bucaqlının xarici bucaqlarının cəminin $360°$-yə bərabər olduğunu qeyd edir. Bunu necə isbat edərsən dedikdə nisbətən çətinlik çəkir. Müəllim burada köməkçi suallar verərək, şagirdlərin keçmiş biliklərini təkrarladır. Şagirdlərə məlumdur ki, istənilən düzgün çoxbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olur. Əgər həmin çoxbucaqlının tərəflərini sonsuz sayda ikiqat artırsaq və bu prosesi sonsuz sayda davam etdirsək, düzgün çoxbucaqlının tərəfləri sonsuz sayda kiçilən və çoxbucaqlının perimetrinin limit qiyməti çevrənin uzunluğuna bərabər olar. Tam çevrə $360°$ olduğundan onda belə nəticəyə gəlmək lazım olur ki, istənilən qabarıq n-bucaqlının xarici bucaqlarının cəmi $360°$-dir. Bəzən eyni bir təklifi yaxud teoremi müxtəlif üsullarla isbat etdikdə bu şagirdlər üçün daha maraqlı olur.



Şəkil 1.

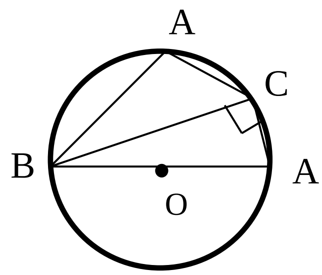
Məsələn, üçbucağın tərəfləri ilə bucaqları arasında asılılığı ifadə edən sinuslar teoreminin iki üsulla isbatına nəzər yetirək.

Sinuslar teoremi aşağıdakı kimidir:

Teorem: İstənilən üçbucağın tərəfləri, həmin tərəflər qarşısında yerləşən bucaqların sinusları ilə mütənasibdir.

İsbatı: Fərz edək ki, A bucağı üçbucağın istənilən bucağıdır (şəkil 1.). Teoremi isbat etmə üçün kifayətdir ki, şəkildə göstərildiyi kimi $a = 2Rsin\angle A$ olduğunu göstərən R-üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur. Burada bir neçə hala baxaq.

I halda hesab edək ki, $\angle A$ itidir. Üçbucağın A iti bucağından fərqli bucaqlarının, məsələn, B təpəsindən çevrənin BA' diametrini çəkək. Alınmış köməkçi $A'BC$ üçbucağına baxaq. Bu üçbucaqda A' bucağı A bucağına bərabərdir. Çünki hər iki bucaq eyni bir BC qövsünə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqdır. Alınan BCA' üçbucağı düzbucaqlı üçbucaqdır. $BC=a$, $BA'=2R$, $\frac{a}{2R} = sinA'$, $A=A'$ olduğundan $a=2RsinA$ alarıq.



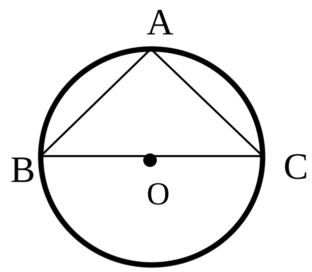
Şəkil 2.

II halda fərz edək ki, A bucağı kor bucaqdır.

Yuxarıdakı qurma işini yerinə yetirək (şəkil 2.).

Bu halda A' bucağı BAC qövsünün yarısına bərabərdir.

Aydındır ki, $A'=\pi - A$ olar. $A'CB$ düzbucaqlı üçbucağından $a=2RsinA'=2RsinA$.



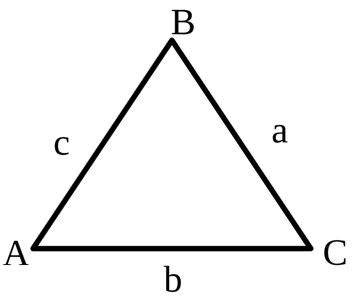
Şəkil 3.

III halda isə A bucağının düzbucaq olduğunu hesab edək (şəkil 3.). Onda BAC düzbucaqlı üçbucağından $a = 2R = 2Rsin\frac{\pi}{2} = 2RsinA$.

Bütün bunları ümumiləşdirərək $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$ olduğunu alarıq.

Sahə anlayışı, müxtəlif müstəvi fiqurların sahəsinin hesablanması artıq şagirdlərə məlumdur. Belə ki, istənilən müstəvi fiqurun sahəsi düsturlarına əsasən həmin fiqurun sahəsini asanlıqla hesablaya bilirlər. Üçbucağın sahə anlayışından istifadə edərək, daha doğrusu, üçbucağın iki tərəfi və onlar arasındakı bucağa görə sahə düsturlarından istifadə etməklə sinuslar teoremini asanlıqla şagirdlər isbat edirlər. fərz edək ki, tərəfləri uyğun olaraq a, b, c və uyğun olaraq həmin tərəflər qarşısındakı bucaqları A, B, C olan ABC üçbucağı verilmişdir (şəkil 4.).

Hər bir cüt tərəf və onlar arasındakı bucağa görə üçbucağın sahə düsturlarını yazaq: $S = \frac{1}{2}absinC, S = \frac{1}{2}acsinB, S = \frac{1}{2}bcsinA$



Şəkil 4.

Bərabərliklərinin sol tərəfi eyni bir üçbucağın sahəsini ifadə etdiyindən sağ tərəflərin də bərabərliyini yaza bilərik.

$\frac{1}{2}absinC = \frac{1}{2}acsinB = \frac{1}{2}bcsinA$ bərabərliyinin bütün hədlərini $\frac{1}{2}abc$ ifadəsinə bölsək, $\frac{sinC}{c} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinA}{a}$ və ya $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$ olduğunu alarıq.

Təcrübə göstərir ki, bu şəkildə aparılan isbatlarda şagirdlər riyaziyyatın anlayışlarının qarşılıqlı əlaqədə olduğunun interaqtivliyini asanlıqla görürlər.

Müşahidələr göstərir ki, müəllim təkcə dərsliklərlə kifayətlənməyib, digər riyazi ədəbiyyatlardan istifadə etməklə şagirdlərin isbat məsələləri həlli bacarığına nail olursa, onun təlim nəticələri də yüksək olur. Belə iş təcrübəsinə malik müəllimlərin şagirdləri gələcəkdə istedadlı riyaziyyatçılar sırasında olur. Xüsusilə, dərnək və fakültativ məşğələlərdə nisbətən maraq kəsb edən və riyazi anlayışlar arasındakı inteqrativliklə həll edilən isbat məsələlərinin həlli, məqsədəuyğun sayılır. Belə məsələlərdən birini qeyd edək:

Məsələ: İsbat edin ki, istənilən $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ ədədi silsiləsi üçün $S = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ cəmi doğrudur.

Həlli: Şagirdlər təyin edirlər ki, sağ tərəfdəki bütün toplananların hər biri məxrəci irrasional olan kəsirlərdir. Ona görə də sağ tərəfdəki hər bir kəsrin sürət və məxrəcini məxrəcdəki ifadələrin qoşmasına vuraq, onda

$$S = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}$$

alarıq.

Sağ tərəfdəki toplananların hər birində kəsrlərin məxrəcindəki ifadə, ədədi silsilənin d hədlər fərqini ifadə edir. Belə ki, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$. Onda cəmi $S = \frac{1}{d}(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}) = \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}$ alarıq.

$S = \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d} = \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})} = \frac{a_n-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})} = \frac{a_1+(n-1)d-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})} = \frac{(n-1)d}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}$ olduğunu alarıq.

Ən sadə isbat məsələsinin həllində, məlum olan biliklərə istinad etməklə gözlənilmədən isbatın sadə yolla alınması, şagirdlərin riyaziyyata qarşı marağını artırır. Məktəb riyaziyyat kursunun hər bir bölməsinə uyğun isbat məsələləri verilmişdir. Məktəb riyaziyyat kursunda verilən isbat məsələlərinin həllində əsasən aşağıdakı isbat metodlarından istifadə olunur. analiz və sintez, daha çox əksini fərz etmə metodu və bir çox isbatlarda tam riyazi induksiyadan istifadə olunur.

Analiz və sintez metodu ilə isbat etmə ənənəvi metodlardan olub geniş tətbiq olunur. Burada məsələdə verilən məchul təklifdən, hissələrə ayırmaqla hər bir mərhələni tədqiq edərək məlum təkliflərə keçirilir. Belə mühakimə forması **analiz** adlanır. İsbat prosesində məsələdə əsas təklifdən başlayaraq, yəni hissələri birləşdirərək nəticədə tezisə gəlinir. Burada isə əksinə, sanki məlum olanlardan, məchul təkliflərə keçirilir ki, bu şəkildə mühakiməyə isə **sintez** deyilir. İsbat prosesində müəllim tərəfindən bunlar şagirdlərə şərh edilmir. Bu müəllimin dərs prosesində həyata keçirdiyi didaktik priyomlardan biridir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz isbat metodları istənilən isbat məsələlərinə birbaşa tətbiq olunmur. Məsələn, həndəsədən, məlumdur ki, düz və tərs teorem anlayışları vardır. Məktəb riyaziyyat dərsliklərinə daxil olan tərs teoremlərin, demək olar ki, əksəriyyəti əksini fərzetmə metodunun tətbiqi ilə isbat olunur. Onu da qeyd edək ki, əksini fərzetmə metodu olduqca qısa bir metoddur. Onun tətbiqi ilə isbat olduqca tez bir zamanda yerinə yetirilir. Digər isbat metodlarından tam riyazi induksiya metodu artıq yuxarı siniflərdə tətbiq edilə bilər. Riyazi induksiya, tam riyazi induksiya isbat metodları uzun müddət az istifadə olunan bir metod kimi müəyyən illərdə dərsliklərdən çıxarılmışdır. Lakin buna baxmayaraq, bu metodların tətbiqi ilə bu gün də müxtəlif təkliflər, məsələlər isbat olunur.

Problemin aktuallığı: Ümumtəhsil məktəblərində məsələ həlli sahəsində şagirdlərin çətinliklərinin qismən də olsa aradan qaldırılması üçün mövzunun tədqiq edilməsi aktuallıq kəsb edir.

Problemin elmi yeniliyi: Ümumiyyətlə riyaziyyatda məsələlərin həlli üçün ümumi həll alqortmi məlum deyildir. Bu sahədə aparılmış tədqiqat işləri kimi bizim məqalədə də məsələ həllinin bəzi ümumi həll metodikası araşdırılmışdır və müasirlik baxımından yeni həll üsulları göstərilmişdir.

Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi: Məqalədən ümumtəhsil məktəblərinin müəllimləri, bakalavriat və magistr tələbələrinin istifadə etməsi və onların bu sahədəki bacarıqlarının formalaşdırılması üçün əhəmiyyətlidir.

Ədəbiyyat:

1. Ümumtəhsil məktəblər üçün riyaziyyat kurikulumu. – Bakı, – 2021.
2. Ağayev.B.A. və b. Riyaziyyat məsələləri. – Bakı, – 1967.
3. Quliyev.Ə.A. Planimetriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı. – Bakı, – 2008.
4. Шарыдин, И.И. Задачи по геометрии. / И.И. Шарыдин. – Москва: Наука, – 1988.

E-mail: kafedra.rtt@adpu.edu.az
aynureabdulezova@gmail.com
Rəyçilər: *riyaz.ü.fəls.dok., dos.* **A.Q. Cəfərov**,
ped.ü.fəls.dok., dos. **M.V. Abdullayeva**
Redaksiyaya daxil olub: 22.12.2023.