RİYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
METHODOLOGY OF TEACHING MATHEMATICS

UOT 372.851

Mətləb Hüseynqulu oğlu Ağayarov
fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti
https://orcid.org/0000-0001-8264-9097
https://doi.org/10.69682/arti.2024.91(4).92-96

Mehman Nəbi oğlu Sadiqov
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosent,
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Fəxrəddin Feyzullah oğlu Əliyev
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosenti,
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

İRRASİONAL BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN MÜXTƏLİF ÜSULLARLA HƏLLİ

Матлаб Гусейнгулу оглы Агаяров
доцент Сумгаитского Государственного Университета,
доктор философии по математике

Мехман Наби оглы Садыгов
доцент Сумгаитского Государственного Университета,
доктор философии по математике

Фахраддин Фейзуллах оглы Алиев
доцент Сумгаитского Государственного Университета,
доктор философии по математике

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ РАЗНЫМИ МЕТОДАМИ

Matlab Huseynqulu Aghayarov
associate professor at Sumgait State University,
doctor of philosophy in mathematics

Mehman Nabi Sadigov
associate professor at Sumgait State University,
doctor of philosophy in mathematics

Fahraddin Feyzullah Aliyev
associatepProfessor at Sumgait State University,
doctor of philosophy in mathematics

SOLUTION OF IRRATIONAL INEQUALITIES BY DIFFERENT METHODS

Xülasə. Məqalədə müxtəlif üsullardan istifadə edilərək müxtəlif növ irrasional tənliklərin həlli təqdim olunmuşdu. Müəllif bəzi riyazi məsələlərin triqononmetriyanın tətbiqi metodu ilə həllinin göstərilmişdir.

Triqononmetriya anlayışının digər elmlərə, o cümlədən həndəsi və riyazi kəmiyyətlərin ölçülməsinə və bir çox riyazi mürəkkəb məsələlərdə isə, hesablamalara tətbiq edilməsinin yolları araşdırılmışdir.

Açar sözlər. *İrrasional ədəd, irrasional bərabərsizlik, əvəzləmə üsulu, qrafik üsul*

Аннотация. В статье представлено решение разных типов иррациональных уравнений различными методами. Автор показал решение некоторых математических задач с помощью тригонометрического метода. Исследованы пути применения понятия тригонометрии к другим наукам, в том числе к измерению геометрических и математических величин и расчетам во многих математически сложных вопросах.

Ключевые слова: *иррациональное число, иррациональное неравенство, метод замещения, графический метод*

Abstract. The article presents the solution of different types of irrational equations using different methods. The author showed the solution of some mathematical problems using the trigonometric method. Explores ways to apply the concept of trigonometry to other sciences, including the measurement of geometric and mathematical quantities and calculations in many mathematically complex issues.

Keywords: *Irrational number, irrational inequality, substitution number, graphical method*

Məlumdur ki, cəbri tənlikləri həll etdikdə həllər çoxluğunu genişləndirmək olar. Lakin bərabərsizlikləri həll etdikdə həllər çoxluğunu genişləndirmək olmaz. Çünki həllər çoxluğu, adətən, təyin oblastının genişlənməsi hesabına genişləndirilir. Bu onunla izah olunur ki, bərabərsizliyin həllər çoxluğu çox zaman sonsuz çoxluq (bir qayda olaraq, bir və ya bir neçə aralıq) olur və çevirmələr aparmaqla həllər çoxluğunun genişlənməsinə yol vermişiksə, yoxlama aparmaq və artıq həlləri atmaq bir çox hallarda mümkün olmur. Bütün bunlar göstərir ki, bərabərsizlikləri həll edərkən hər addımda eynigüclülüyə keçmək lazımdır.

Əlbəttə, biz, irrasional bərabərsizliklərin həllində söylədiyimiz faktların araşdırılmasına çalışacağıq.

Cüt dərəcəli köklər daxil olan irrasional bərabərsizliklərin həllində ən başlıca məsələ dəyişənin mümkün qiymətləri çoxluğunun kökaltı ifadənin mənfi olmayan ədədlər çoxluğu olduğunun nəzərə alınmasıdır.

Əvvəlcə $\frac{\sqrt[2k]{f(x)}}{g(x)} \geq 0$ və ya $\frac{\sqrt[2k]{f(x)}}{g(x)} \leq 0$ irrasional bərabərsizliklərdən birincisinin həllinə baxaq.

Bu bərabərsizliyi həll edərkən şagirdlər səhvlərə yol verirlər. Bəzən onlar verilən bərabərsizliyin ciddi bərabərsizlik olmadığına diqqət yetirmirlər. Ona görə də verilən bərabərsizliyin həllini aşağıdakı kimi vermək daha məqsədəuyğun olar:

$$\frac{\sqrt[2k]{f(x)}}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt[2k]{f(x)}}{g(x)} = 0, \\ \frac{\sqrt[2k]{f(x)}}{g(x)} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0, \end{cases} \\ \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right. \quad (1)$$

Misal 1. (1) düsturlarına əsasən aşağıdakı bərabərsizliyi həll edək və onun tam həllərinin cəmini tapaq:

$$\frac{\sqrt{35+2x-x^2}}{24+5x-x^2} \geq 0.$$

$$\frac{\sqrt{35+2x-x^2}}{24+5x-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x-35=0, \\ x^2-5x-24 \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-5x-24<0, \\ -x^2+2x+35>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=7, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x \in (-3;8), \\ x \in (-5;7) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-5\} \cup (-3;7].$$

Beləliklə, bərabərsizliyin tam həllərinin cəmi

$$-5+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5 \\ +6+7=20$$

olur.

İrrasional bərabərsizliklərin əsas növlərindən biri

$f(x) \leq \sqrt[2k]{g(x)}$ və ya $f(x) \geq \sqrt[2k]{g(x)}$

bərabərsizliyidir.

$f(x) \le \sqrt[2k]{g(x)}$ bərabərsizliyinə baxaq və onun təyin oblastını X ilə işarə edək. Aydındır ki, X çoxluğu $g(x) \ge 0$ şərtini ödəyən x elementlərindən təşkil edilmişdir. Bərabərsizliyin sağ tərəfi mənfi olmadığından, sol tərəfin isə işarəsi məlum olmadığından kvadrata yüksəltmək üçün X çoxluğunu iki hissəyə ayırmaq lazımdır: X_1 çoxluğu elə $x \in X$ ədədlərindən ibarət olsun ki, $f(x) \le 0$ və X_2 çoxluğu elə $x \in X$ ədədlərindən ibarət olsun ki, $f(x) > 0$ olsun. Hər iki halı araşdıraq. Tutaq ki, $x \in X_1$, onda $f(x) \le 0$ və $\sqrt[2k]{g(x)} \ge 0$, lakin istənilən müsbət olmayan ədəd istənilən mənfi olmayan ədəddən böyük olmadığı üçün ixtiyari $x \in X_1$ üçün $f(x) \le \sqrt[2k]{g(x)}$ bərabərsizliyi doğrudur, deməli, bütün $x \in X_1$ nöqtələri verilmiş bərabərsizliyin həllər çoxluğuna daxil olur. Əgər $x \in X_2$ olarsa, bərabərsizlik $(f(x))^{2k} \le g(x)$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür (yalnız X_2 çoxluğunda!). R_2 sonuncu bərabərsizliyin həllər çoxluğu olsun. X_2-yə daxil olan $x \in R_2$ qiymətlərini götürsək, biz ilkin bərabərsizliyin həllər çoxluğunun X_2-də yerləşən hissəsini alarıq. Nəticədə

$f(x) \le \sqrt[2k]{g(x)}$ bərabərsizliyinin R həllər çoxluğu belə olur: $R = X_1 \cup (X_2 \cap R_2)$.

İndi isə $f(x) \ge \sqrt[2k]{g(x)}$ bərabərsizliyinin həllini araşdıraq. Bu bərabərsizliyin də X təyin oblastı $g(x) \ge 0$ şərtini ödəyən x elementlərindən ibarətdir. X_1 bütün elə $x \in X$ ədədlərindən ibarət olsun ki, $f(x) < 0$ və X_2 bütün elə $x \in X$ ədədlərindən ibarət olsun ki, $f(x) \ge 0$ olsun. Onda $x \in X_1$, olduqda sol tərəf mənfi olduğu, sağ tərəf isə mənfi olmadığı üçün $f(x) \ge \sqrt{g(x)}$ bərabərsizliyi ödənilə bilməz. Deməli, X_1 çoxluğunda verilən bərabərsizliyin həlli yoxdur.

Əgər $x \in X_2$ olarsa, onda bərabərsizliyin hər iki tərəfi müsbət olur və bu bərabərsizlik $(f(x))^{2k} \ge g(x)$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür (X_2çoxluğunda!). R_2 ilə sonuncu bərabərsizliyin həllər çoxluğunu işarə etsək, ilkin bərabərsizliyin həllər çoxluğu $R_2 \cap X_2$ olar (yada salaq ki, X_1-də həll yoxdur).

$f(x) \ge \sqrt[2k]{g(x)}$ və $f(x) \le \sqrt[2k]{g(x)}$ bərabərsizliklərinin həlli prosesini " $\Leftrightarrow$ " eynigüclülük işarəsinin köməyi ilə aşağıdakı kimi yazmaq daha məqsədəuyğundur:

$$f(x) \ge \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ \left(f(x)\right)^2 \ge \left(\sqrt{g(x)}\right)^{2k}. \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) \le \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ \left(\sqrt[2k]{g(x)}\right)^{2k} \ge \left(f(x)\right)^{2k}, \end{cases} \quad (3) \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

İndi isə irrasional bərabərsizliklərin ən çox rast gəlinən digər növləri ilə tanış olaq.

$\sqrt{ax+b} \le cx+d$ və ya $\sqrt{ax+b} \ge cx+d$ şəklində bərabərsizliklərin həlli.

$\sqrt{ax+b} \le cx+d$ (4)

və ya

$\sqrt{ax+b} \ge cx+d$ (5)

bərabərsizliklərini ümumi həll üsullardan başqa ən azı iki üsulla da həll etmək olar.

1-ci üsul. (4) bərabərsizliyini $t = \sqrt{ax+b}, t \ge 0$ əvəzləməsinin köməyi ilə həll edək. Onda

$$ax + b = t^2 \Leftrightarrow x = \frac{t^2 - b}{a}$$

və (4) bərabərsizliyi

$$t \le \frac{c(t^2-b)}{a} + d \Leftrightarrow \frac{c(t^2-b) + ad - at}{a} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ct^2 - at + ad - bc}{a} \ge 0$$

şəklinə düşür və (4 bərabərsizliyinin həlli

$$\frac{ct^2 - at + ad - bc}{a} \ge 0$$

kvadrat bərabərsizliyinin mənfi olmayan həllərinin tapılmasına gətirilir.

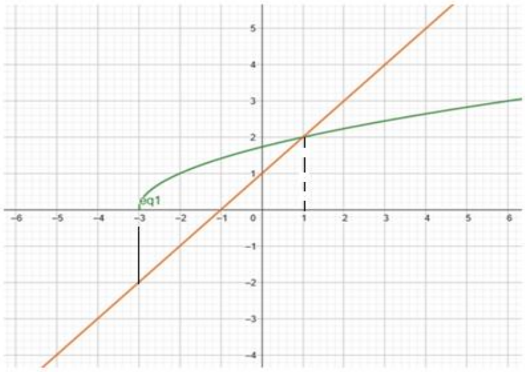
Bu üsuldan çox zaman parametrdən asılı bərabərsizliklərin həllində istifadə edilir.

2-ci üsul. Bu bərabərsizliyi həll edərkən praktik olaraq onun sağ və sol sol tərəflərinin qrafiklərindən də istifadə etmək olar. Bərabərsizliyin sol və sağ tərəflərinin qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisləri həlli olur.

Misal 2. $\sqrt{x+3} > x+1$ bərabərsizliyini həll edək.

Həlli. Bu bərabərsizliyi yuxarıda qeyd olunan üsullardan biri ilə həll edə bilərik. Lakin onu qrafik üsulla həll edəcəyik. Bunun üçün eyni bir koordinat sistemində $y = \sqrt{x+3}$ və

$y = x + 1$ funksiyalarının qrafiklərini quraq (şəkil 1), baxaq görək hansı aralıqda birinci qrafik ikincidən yuxarıda yerləşir.



Şəkil 1

Tənliyin həllini tapmaq üçün bicə o qalır ki, $\sqrt{x+3} = x + 1$ tənliyini həll edək:

$$\sqrt{x+3} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x + 3 = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ (x+2)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Beləliklə, şəkil 1-ə əsaslanaraq verilən bərabərsizliyin həllinin $[-3; 1)$ olduğunu alırıq.

İndi isə nisbətən daha çətin bərabərsizliklərə baxaq.

$g(x) \geq 0$ olarsa, dəyişənin bütün mümkün qiymətlər çoxluğunda $\sqrt{f(x)} - g(x)$ fərqinin işarəsi $f(x) - g^2(x)$ fərqinin işarəsi ilə üst-üstə düşür, onda aşağıdakı eynigüclülük şərtləri alınır:

a) Əgər $g(x) \geq 0$ olarsa, onda

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 \; (\leq 0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} 0 \geq 0 \; (\leq 0);$$

b) Əgər $g(x) < 0$ olarsa, onda $\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 \; (\leq 0) \Leftrightarrow h(x) < 0 (> 0).$

Hər iki şərti birləşdirməklə alarıq ki,

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 \; (\leq 0) \Leftrightarrow h(x) < 0 (> 0);$$

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 \; (\leq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ h(x) > 0 (< 0), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 (\leq 0). \end{cases} \end{array} \right.$$

Dəyişənin bütün mümkün qiymətlərində $\sqrt{f(x)} - g(x)$ fərqinin işarəsi

$f(x) - g^2(x)$ fərqinin işarəsi ilə üst-üstə düşdüyündən

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 \; (\leq 0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \geq 0 (\leq 0)$$

olur.

Misal 3. Bu üsulun tətbiqi ilə $\frac{\sqrt{4x^2-3x+2} - \sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6} \leq 0$ bərabərsizliyinin həlli olan parçanın uzunluğunu tapaq.

Həlli. Bunun üçün əvvəlcə verilmiş bərabərsizliyi həll edək:

$$\frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - \sqrt{4x - 3}}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ 4x - 3 \geq 0, \\ \dfrac{4x^2 - 7x + 5}{(x-2)(x-3)} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 \geq 0, \\ (x-2)(x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 3).$$

Aşkardır ki, $4x^2 - 3x + 2$ və $4x^2 - 7x + 5$ kvadrat üçhədlilərinin hər ikisinin də diskriminantı mənfidir. Ona görə də onlar yalnız müsbət qiymətlər alır.

Beləliklə, axtarılan parçanın uzunluğu 1-ə bərabər olur.

Problemin aktuallığı. Baxılan problemin tədqiqinin nəticələri irrasional bərabərsizliklərin təlimi prosesinin intensivləşdirilməsində, baxılan üsullardan istifadə etmə bacarıqlarının, vərdişlərinin formalaşdırılmasında xüsusi aktuallıq kəsb edir.

Problemin elmi yeniliyi. İrrasional bərabərsizliklərin həlli üsullarına əsaslanaraq onların müxtəlif üsullarla həlli verilmişdir.

Kəmiyyətlərin və onlarla bağlı məsələlərdə triqononmetriyann tətbiqinin daha da dərinləşdirilməsi, bir çox müxtəlif tip çətinlik dərəcəsi yüksək olan misalların opta məktəb proqramına uyğun, ancaq qismən çətin metod və priyomların tətbiqi ilə həll edilməsi.

Problemin praktik əhəmiyyəti. Tədqiqatın nəticələrindən riyaziyyatı dərindən öyrənən siniflərdə, şagirdlərin ali məktəblərə qəbul imtahanlarına və olimpiadalara hazırlığı üçün istifadə edilə bilər.

Ədəbiyyat:

1. Həsən Hüseynov, Vladimir Dyatlov. Riyaziyyat (metodlar, çalışmalar, həllər). -Bakı, "Elm", -1998.
2. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому Государственному экзамену. -М.:Айрис-пресс, -2004.
3. Шарыгин И.Ф. Математика для школьников старших классов. -М.:Дрофа, -1995.

E-mail:af_64@mail.ru
E-mail:mehman.sadiqov.2016@mail.ru
E-mail: amisum-alava@mail.ru
Redaksiyaya daxil olub: 01.07.2024