UOT 372.851

Vüsalə Telman qızı Allahverdiyeva
Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimi
https://orcid.org/0009-0002-1358-8483
https://doi.org/10.69682/arti.2024.91(4).101-105

Ziba Novruz qızı Rəhimova
Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimi
https://orcid.org/0009-0009-1933-1831

Dilbər Məhəmməd qızı Qasımzadə
Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimi
https://orcid.org/0009-0001-8801-1120

TRİQONOMETRİYANIN MÜXTƏLİF TİP MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ TƏTBİQİ

Вюсала Тельман гызы Аллахвердиева
преподаватель Сумгаитского Государственного Технического Колледжа при Сумгаитском Государственном Университете

Зиба Новруз гызы Рагимова
преподаватель Сумгаитского Государственного Технического Колледжа при Сумгаитском Государственном Университете

Дильбяр Магомед гызы Гасымзаде
преподаватель Сумгаитского Государственного Технического Колледжа при Сумгаитском Государственном Университете

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ

Vusala Telman Allahverdieva
teacher at Sumgait State Technical College under Sumgait State University

Ziba Novruz Rahimova
teacher at Sumgait State Technical College under Sumgait State University

Dilbar Mahammad Gasimzade
teacher at Sumgait State Technical College under Sumgait State University

APPLICATION OF TRIGONOMETRY TO SOLVE VARIOUS TYPES OF PROBLEMS

Xülasə. Məqalədə bəzi riyazi məsələlərin triqonometriyanın tətbiqi metodu ilə həllinin göstərilmişdir. Triqonometriya anlayışının digər elmlərə, o cümlədən həndəsi və riyazi kəmiyyətlərin ölçülməsinə və bir çox riyazi mürəkkəb məsələlərdə isə, hesablamalara tətbiq edilməsinin yolları araşdırılmışdir
Açar sözlər. *Triqonometriya, üçbucaq, paraleloqram, sahə, diaqonal, tərəf, sinuslar teoremi, bərabərlik, məchul, dəyişən, parametr*

Аннотация. В статье показано решение некоторых математических задач методом тригонометрического применения. Исследованы пути использования понятия тригонометрии к другим наукам, в том числе к измерению геометрических и математических величин и расчетам во многих математически сложных вопросах.
Ключевые слова. *Тригонометрия, треугольник, параллелограмм, площадь, диагональ, сторона, теорема синусов, равенство, ограничение, переменная, параметр.*

Abstract. The article shows the solution of some mathematical problems by the method of trigonometrical application. Ways of applying the concept of trigonometry to other sciences, including the measurement of geometric and mathematical quantities and calculations in many mathematically complex issues, have been investigated.

Keywords. *Trigonometry, triangle, parallelogram, area, diagonal, side, sine theorem, equality, constraint, variable, parameter*

Çox zaman belə bir sual verilir: Triqonometriya nəyə lazımdır?

Əslində bu sualın cavabı o qədər genişdir ki, həyatın, texnikanın, elmin əksər sahələrini əhatə edir deyə bilərik: Triqonometriyanın köməyi ilə fiziki, kimyəvi məsələlər, mexanika və astronomiyada da ən çox cisimlərin müxtəlif hərəkət tənlikləri, hava və su nəqliyyatında , naviqasiya cihazlarının iş prinsipi, akustik və optik cihazların, musiqi nəzəriyyəsinin, tibbdə kompüter tomoqrafiyasının, ultrasəs müayinə cihazlarının... və s.

Göründüyü kimi, tətbiq sahəsi-sferası digər riyazi anlayışlardan kəskin şəkildə seçiləcək qədər genişdir. Məsafədə bir neçə məsələnin həllinə triqonometriyanı tətbiq edəcəyik. İlk öncə triqonometriyanın həndəsəyə tətbiqinə aid məsələyə baxaq, bu səbəbdən ki, triqonometriya da, həndəsədə orta məktəbin riyaziyyat kursuna daxildir.

Məlumdur ki, orta məktəb həndəsəsində əsas mövzulardan biri də müstəvi fiqurların sahələrinin hesablanmasıdır. Bu mövzuda bir çox sahə düsturları da vardır. Ancaq bəzən , bizdən asılı olmadan məsələ elə verilir ki , o halda verilənlər və məlum düsturlar məsələnin həlli üçün kifayət etmir.

MƏSƏLƏ 1.

Diaqonalları p və q $(p > q)$, və iti bucağı α olan paraleloqramın sahəsini tapın.

HƏLLİ: Əvvəlcə məsələnin həlli üçün vacib olan axtarışlar edək;

1.İlk öncə bu şərtlər daxilində məlum sahə düsturlarından hansı

daha münasib olar, deyə fikirləşsək, paraleloqramın

$S = \frac{1}{2} p \times q \times sin\,\varphi$ $(\varphi = \widehat{p\,q})$ sahə düsturu yada düşür.

Ancaq, diqqət etsək, görürük ki, bu halda paraleloqramın diaqonalları arasında qalan φ bucağının tapılması özü ayrılıqda mürəkkəb bir axtarış olardı , bu səbəbdən də qeyd olunan sahə düsturundan imtina etməli oluruq.

2. $S = xh$, düsturunun tətbiqi mümkün sayılmır, çünki, nə x-tərəfi, nə də bu tərəfə çəkilmiş h-hündürlüyü də məlum deyil və tapılması da mürəkkəbdir.

3. Paraleloqramın tərəflərini şərti olaraq x və y ilə işarə edərək; $S = x \times y \times sin\,\alpha$ düsturunu nəzərdən keçirək;

Məsələnin şərtində tərəflər verilmədiyindən bu sahə düsturunun da yetərli olmaması fikri yarana bilər, ancaq triqonometriyanı verilən şərtlər və qəbul etdiyimiz x, y tərəflərini nəzərə almaqla tətbiq edək.

Triqonometriyadan orta məktəb kursunda tədris edilən və tətbiq sahəsi bir çox məsələlərinin həllində xüsusi yer tutan kosinuslar teoremini tətbiq edək: Yəni diaqonalları p və q, tərəfləri x və y iti bucağı α olan paraleloqramın diaqonallarını tərəflərindən və α –dan asılı olaraq tapaq.

$$p^2 = x^2 + y^2 - 2xy\,cos(\pi - \alpha)$$
$$q^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$$

Bu iki bərabərlikdə iştirak edən 2 məchul və 3 məlum parametr vardır, məchul parametrlər isə 2-ci dərəcədən iştirak edir, buna baxmayaraq, çıxış yolu var: tərəf-tərəfə çıxsaq, alarıq:

$$p^2 - q^2 = 4xy\,cos\,\alpha$$

Burada $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ olduğu nəzərə alınmışdır.

Nəticədə: $p^2 - q^2 = 4xy\,cos\,\alpha$ bərabərliyində məchul olan x, y tərəflərin hasili iştirak edər.

$xy = \frac{p^2 - q^2}{4\,cos\,\alpha}$ əvəz etsək, və hər tərəfi $\sin\alpha$ vursaq;

$xy\,sin\,\alpha = \frac{p^2 - q^2}{4\,cos\,\alpha} \times sin\,\alpha$ alarıq ki, buradan da,

$S = xy\sin\alpha = \frac{p^2 - q^2}{4} \times \operatorname{tg}\alpha$, yəni paraleloqramın sahəsi $S = xy \times \operatorname{tg}\alpha$ düsturunu alırıq. Məsələ həll olundu.

Triqonometriyanın həndəsəyə tətbiqinə aid daha bir məsələ baxaq.

MƏSƏLƏ 2.

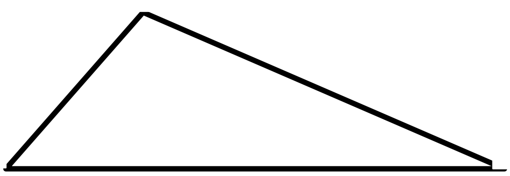
Eni 10 metr olan evin dam örtüyü yan tərəfdən baxdıqda oturacaqla bir tərəfdən 30°, *digər tərəfdən isə* 60° *bucaq əmələ gətirən üçbucaq formasında olmaqdır. Dam örtüyünün material sərfiyyatını bilmək üçün örtüyün ümumi uzunluğunu tapmaq lazımdır.*

HƏLLİ: Məsələnin şərtinə uyğun dam örtüyünü yan tərəfdən şəklini çəkək:

Şəkildən də göründüyü kimi məsələnin həlli üçbucaq şəkilli dam örtüyünü

AB və BC tərəflərinin tapılmasına gətirilir və həlli triqonometriyadan

məlum sinuslar teoremini tətbiq etməklə tapırıq:



$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ düsturunu məsafəyə tətbiq etmək üçün

AC=10, $\hat{A} = 60°, b = AB, \hat{B} = 90°, \hat{C} = 30°$ işarə qəbul etsək,

1) $\frac{10}{\sin 90°} = \frac{AB}{\sin 30°}\ dan \Rightarrow AB = 10 \times \frac{1}{2} \times 1 = 5$

2) $\frac{10}{\sin 90°} = \frac{BC}{\sin 60°} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \times 1 = 5\sqrt{3}$

AB+BC=5m+$5\sqrt{3} = 5(\sqrt{3}+1)m$; $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ qəbul edib,

ümumi dam örtüyünə sərf edilən materialın uzunluğunu tapırıq.

Triqonometriyanın köməyilə qismən çətin və həm də cəbri məsələyə baxaq.

MƏSƏLƏ 3.

$x^{2n+1} - 1 = 0$ *tənliyinin köklərinin həqiqi hissələtinin cəmini tapın.*

HƏLLİ:

Qeyd edək ki, məsələnin həllini bir neçə metodla tapmaq olar:

1) Viyet teoreminin ümumi həllinin xassəsini tətbiq etməklə

2) Yeni dəyişən – parametr daxil etməklə

3) Verilmiş məsələni həll etmək üçün bu məsələ ilə müəyyən analogiyası olan başqa bir məsələ verilmiş məsələni birləşdirərək həll etməklə

4) Tez-tez istifadə olunan kəmiyyətlərə hər hansı həndəsi qiymətlər verməklə

1-ci üsulla məsələni həll edək:

$x^{2n+1} - 1 = 0$ tənliyinin həlli

$x^{2n+1} = 1$ şəklindədir və köklərinin sayı 2n+1 sayda olar. Kompleks ədədlər çoxluğunda tənliyin bütün kökləri

$$\sqrt[2n+1]{1} = \sqrt[2n+1]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{2n+1}$$

k= 0 , 1 , 2 , 3 , ... , 2n , olar. Yəni tənliyin kökləri

1: $\cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$; $\cos\frac{4\pi}{2n+1} + i\sin\frac{4\pi}{2n+1}$; ...; $\cos\frac{2\pi n}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi n}{2n+1}$; $\cos\frac{2(n+1)\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}$; $\cos\frac{4\pi n}{2n+1} + i\sin\frac{4\pi n}{2n+1}$. olar.

Göründüyü kimi

$\cos\frac{2\pi}{2n+1}; \cos\frac{4\pi}{2n+1}; ...; \cos\frac{2\pi n}{2n+1}$ ədədləri verilmiş tənliyin köklərinin həqiqi hissələridir. n-dərəcəli tənliyin köklərinin cəminin Viyet teoreminə görə sıfıra bərabər olduğu məlumdur.

Yəni :

$$1 + \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{4\pi n}{2n+1} = 0$$

$x^{2n+1} - 1 = 0$ tənliyinin bütün xəyali kökləri cüt-cüt qoşma olduğundan ,

$$1 + \alpha(\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{2n+1}) = 0$$

olduğu alınır. Buradan isə,

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

olduğu məlum olur.

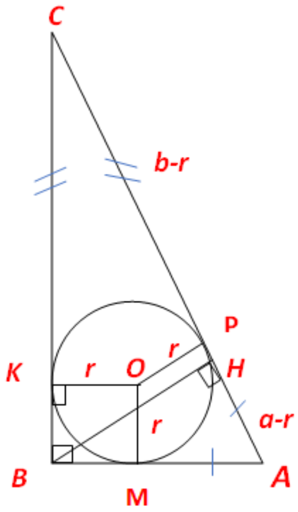
MƏSƏLƏ 4.

Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzuna endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu 10 sm olar-

sa, bu düzbucaqlı üçbucaqdan sahəsi 50 sm^2 olan dairə kəsmək olarmı?

Həlli:

Göründüyü kimi, məsələ həndəsənin köməyilə tətbiqi məsələdir



Aydındır ki, hipotenuzuna endirilmiş hündürlüyü 10 sm olan çoxlu sayda düzbucaqlı üçbucaqlar var və hər bir belə düzbucaqlı üçbucağında daxilinə çəkilmiş dairələrin(çevrələrin)

hərəsinin öz radiusu var. Ona görə biz isbat etməliyik ki, sahəsi 50 sm^2olan dairəni düz bucaq təpəsindən endirilmiş hündürlüyü 10 sm olan düzbucaqlı üçbucaqdan kəsib götürmək olar və bu çevrənin radiusu ən kiçik qiymət alar.

Məsələnin həllini xarakterizə edən həndəsi təsviri çəkək və müxtəlif işarələmələri edək:

ABC üçbucağın da; $\hat{B} = 90°\,; OK = OP = OM = r\,; BH \perp AC\,; BH = 10sm\,; AC = b\,; AB = a\,, \angle\hat{A} = \alpha$

Bu işarələmələrə və həndəsi teoremlərə görə isə alırıq ki, CK=CD=b-r; KB=BM=OM=OK=r və AD=AM=a-r olar. $\triangle\, AHB$ və $\triangle\, BHC -$
dən sinuslar teoremine görə;

$$a = \frac{10}{\sin\alpha};\ b = \frac{10}{\cos\alpha} \text{ yaza bilərik.}$$

$AC = c$ – hipotenuzunu iki yolla tapa bilərik;

1) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\frac{10}{\sin\alpha})^2 + (\frac{10}{\cos\alpha})^2} = \frac{10}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$$2) c = \left(\frac{10}{\sin\alpha} - r\right) + \left(\frac{10}{\cos\alpha} - r\right) = \frac{10}{\sin\alpha} + \frac{10}{\cos\alpha} - 2r$$

Buradan da, alırıq

$$\frac{10}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{10}{\sin\alpha} + \frac{10}{\cos\alpha} - 2r \ \Rightarrow 2r = \frac{10}{\sin\alpha} + \frac{10}{\cos\alpha} - \frac{10}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow r = 5\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

Beləliklə, məsələnin həlli sonuncu bərabərlikdəki mötərizə daxilində olan α-dan asılı funksiyanın ən kiçik qiymətinin tapılmasına gətirildi, yəni

$$min f(x) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

qiymətini tapmalıyıq. α-nın hansı qiymətində f(x) – funksiyası ən kiçik qiymət alar.

Bu sualın cavabını həm törəmə ilə , həm də adi triqonometrik ifadənin sadələşdirilməsi yoluyla da tapa bilərik. Sadələşdirmə yoluyla göstərək ki, $\alpha = \pi/_4$ olduqda, f(x)-si minimum alır.

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha^2 + \sin\alpha^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \cos(90° - \alpha)}{\sin(90° - \alpha)} + \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{2sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\cos(45° - \frac{\alpha}{2})} + \frac{2sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$= \frac{\sin(45° - \frac{\alpha}{2})}{\cos(45° - \frac{\alpha}{2})} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 45°}{\cos(45° - \frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin 45}{\cos 45 + \cos(45° - \alpha)}$$

Son ifadədə $\alpha = 45°$ olsa, daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu r ən kiçik olar. Onda $r = 5 \times \frac{2\sin 45°}{\cos 45°+1} = 10(\sqrt{2}-1) olar \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \times 100 \times \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \Rightarrow 50\ alırıq.$

İndi isə triqonometriyanı cəbri məsələyə tətbiq edək, daha doğrusu triqonometriyanın köməyilə verilmiş funksiyanı araşdırıb onun hansı sinifdən olmasını müəyyən edək.

MƏSƏLƏ 5.

$f(x) = sin(arc\,sin\,x + arc\,tg\,x)$

funksiyasının cəbri funksiya olduğunu triqonometriyanı tətbiq etməklə göstərin.

HƏLLİ:

Əvvəlcə triqonometriya kursundan iki bucaq cəminin sinusu düsturunu tətbiq edərək, aşağıdakı bərabərliyi alarıq.

$$\begin{aligned} &\mathrm{f(x)} \\ &= \sin(\mathrm{arc\,sin\,x}) \\ &\quad \times \cos(\mathrm{arctgx}) \\ &\quad + \sin(\mathrm{arctgx}) \times \cos(\mathrm{arc\,sin\,x}) \end{aligned}$$

funksiyanın yeni ayrılışında toplananların hər birini ayrı-ayrı sadələşdirək;

a) $\sin(\mathrm{arc\,sin\,x}) = \mathrm{x}$

b) $\cos(\mathrm{arctgx}) = \frac{1}{\sec(\mathrm{arctgx})} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg(arctgx)}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}}$;

c) $\cos(\mathrm{arc\,sin\,x}) = \sqrt{1-\sin(\mathrm{arcsinx})^2}$
$= \sqrt{1-\mathrm{x}^2}$

ç) $\sin(\mathrm{arc\,tg\,x})$
$= \cos(\mathrm{arctgx})$
$\times \mathrm{tg(arctgx)} = \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}}$

Beləliklə, alırıq ki, tərs triqonometrik funksiyaların və məlum triqonometrik eyniliklәri tətbiq etməklə verilən *f(x)* funksiyası

$$f(x) = x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}x = \frac{x(1+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$$

Şəklinə düşür ki, buradan da onun cəbri funksiya olması aşkar görünür.

Problemin aktuallığı: məqalədə bəzi riyazi məsələlərin triqonometriyanın tətbiqi metodu ilə həllinin göstərilmişdir. Triqononmeriya anlayışının digər elmlərə, o cümlədən həndəsi və riyazi kəmiyyətlərin ölçülməsinə və bir çox riyazi mürəkkəb məsələlərdə isə ,hesablamalara tədbiq edilməsinin yolları araşdırılmışdir.

Problemin elmi yeniliyi. Kəmiyyətlərin və onlarla bağlı məsələlərdə triqonònometriyann tətbiqinin daha da dərinləşdirilməsi, bir çox müxtəlif tip çətinlik dərəcəsi yüksək olan misalların opta məktəb proqramına uyğun, ancaq qismən çətin metod və priyomların tətbiqi ilə həll edilməsi

Problemin praktik əhəmiyyəti. Məqalədə göstərilən məsələlərin triqonometriyanın tətbiq edilməsiylə müxtəlif rasional və həndəsi üsullarla həlli metodikası şagirdlərə və həmçinin tədqiqatçılara triqonometriyanın həm cəbri, həm də həndəsi məsələlərin həllərində, eləcə də uyğun isbat məsələlərində yardımçı ola bilər.

Ədəbiyyat:

1. Туманов С.И. Поиски решения задач / -Москва : Издательство «Просвещение» , -1969. -267 с.
2. Ивлев Б.М., Шварцбурд С.И. и др**.** Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. / Учебн. пособие для 10-11 кл. средн. Школы. -М.: Просвещение, -1990.
3. İbrahimov Ə.Y. Kreymer A.Y., Sadıqov S.N. və b. Çətinlik dərəcəsi yüksək olan riyaziyyat məsələlərinin həlli üzrə praktikum. / -Bakı, 1975. -287 s.
4. M.H. Yaqubov və b. Riyaziyyat. Məsələ və misallar. /-B. : Çaşıoğlu, -2009. -310 s

E-mail: mammedovav1980@gmail.com
rehimovaziba40@gmail.com
dilberqasimzade@mail.ru
Redaksiyaya daxil olub: 01.07.2024