UOT 372.851

Laura Faiq qızı Fətullayeva
mexanika üzrə elmlər doktoru, professor
https://orcid.org/0009-0006-2159-4671
https://doi.org/10.69682/arti.2024.91(5).152-157

Nəzakət Böyükağa qızı Məmmədova
Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi analizin
riyazi üsulları kafedrasının dosenti,
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,
https://orcid.org/0009-0006-4848-3269

Rəna Üzeyir qızı Orucova
Azərbaycan Dövlət Aqrar Universitetinin
Fizika və riyaziyyat kafedrasının dosenti,
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,
https://orcid.org/0009-0000-5360-6880

PLASTİKİYYƏT NƏZƏRİYYƏSİ MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİNƏ ELASTİKİ HƏLLƏR ÜSULUNUN TƏTBİQİ

Лаура Фаик кызы Фатуллаева
доктор наук по механике, профессор

Назакет Боюкага кызы Мамедова
доцент кафедры Математические методы прикладного анализа
Бакинского Государственогой Университета,
доктор философии по математике

Рена Узеир кызы Оруджова
доцент
кафедры Физики и математики
Азербайджанского Государственного Аграрного Университета
доктор философии по математике

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УПРУГИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Laura Faik Fatullayeva
doctor of sciences in mechanics, professor

Nazakat Boyukagha Mammadova
associate professor of the department of Mathematical methods of applied analysis
at the Baku State University
doctor of philosophy in mathematics

Rena Uzeyir Orujova
associate professor of the department of physics and mathematics at the
Azerbaijan State Agrarian University
doctor of philosophy in mathematics

APPLICATION OF THE ELASTIC SOLUTION METHOD TO SOLVING PROBLEMS OF PLASTICITY THEORY

Xülasə. "Ədədi üsullar" və "Hesablama riyaziyyatı" fənlərinin tədrisi birbaşa olaraq riyaziyyatın fundamental sahələri ilə əlaqəlidir. Eyni zamanda təqribi hesablama üsulları tətbiqi elm sahələrində və riyazi modelləşdirmədə rast gəlinən bir çox məsələlərin həllində əvəzolunmaz rol oynayırlar. Təqdim olunan məqalədə plastikiyyət nəzəriyyəsinin mürəkkəb problemlərinin həllinə tətbiq olunan elastiki həllər üsulu araşdırılmış və bir praktiki nümunə üzərində üsul izah olunmuşdur.

Açar sözlər: *elastiki həllər üsulu, çubuğun materialı, gərginlik, deformasiya, elastiklik modulu, qüvvə, ardıcıl yaxınlaşma prosesi.*

Резюме. Преподавание предметов «Численные методы» и «Вычислительная математика» напрямую связано с фундаментальными направлениями математики. В то же время приближенные методы играют незаменимую роль при решении многих задач, встречающихся в области прикладных наук и математического моделирования. В представленной статье исследован метод упругих решений, применяемый для решения сложных задач теории пластичности и пояснен метод на практическом примере.

Ключевые слова: *метод упругих решений, материал стержня, напряжение, деформация, модуль упругости, сила, процесс последовательного приближения.*

Summary. Teaching the subjects "Numerical Methods" and "Computational Mathematics" is directly related to the fundamental areas of mathematics. At the same time, approximate methods play an indispensable role in solving many problems encountered in the field of applied sciences and mathematical modeling. The presented article examines the method of elastic solutions used to solve complex problems in the theory of plasticity and explains the method using a practical example.

Keywords: *method of elastic solutions, rod material, stress, deformation, elastic modulus, force, successive approximation process.*

Giriş

Məlumdur ki, plastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin həlli prosesi olduqca mürəkkəbdir. Bu zaman xüsusi törəməli qeyri-xətti diferensial tənliklər sinfi alınır. Həll prosesində yaranmış mürəkkəb məsələlərin analitik həlli bəzi hallarda çox çətin olur, hətta elə hallar olur ki, qoyulmuş məsələni həll etmək mümkün olmur. Bu səbəbdən plastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin, ümumiyyətlə, tətbiqi riyaziyyat (mexanika, riyazi fizika) və riyazi modelləşdirmə məsələlərinin həllinə təqribi üsullar tətbiq olunur [1, s. 2]. Belə üsullardan biri A.A. İlyuşin tərəfindən təklif olunmuş və elastiki həllər üsulu adlandırılmışdır [3]. Üsulun əsas ideyası ondan ibarətdir ki, plastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsi elastikiyyət nəzəriyyəsinin xətti məsələsinin həllər ardıcıllığının qurulmasına gətirilir və bu ardıcıllıq plastikiyyət məsələsinin həllinə yığılır.

Elastiki həllər üsulunun iki müxtəlif modifikasiyası var:

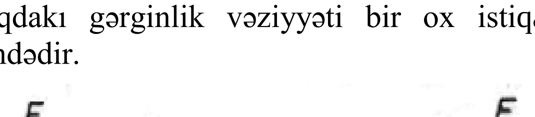
1. Əlavə yüklənmə zamanı elastiki həllər üsulu;
2. Dəyişən parametrlər daxil olan elastiki həllər üsulu.

Üsulun birinci modifikasiyası plastiki deformasiyanın yaranmasına səbəb olan hər hansı əlavə həcmi və səthi yüklənmənin təsir etməsi zamanı tətbiq olunur. Elastikiyyət modulunun və Puasson əmsalının dəyişilməsi ikinci modifikasiyanın tətbiq olunmasına səbəb olur.

Elastiki həllər üsulunun tətbiqi

Üsulun "Əlavə yüklənmə zamanı elastiki həllər üsulu" adlanan modifikasiya olunmuş formasının izahını və tətbiqini praktiki məsələ üzərində şərh edək. Üsulun "Dəyişən parametrlər daxil olan elastiki həllər üsulu" adlanan formasının izahat və tətbiqini sonrakı tədqiqatlarımızda verəcəyik.

Tutaq ki, en kəsiyinin sahəsi A olan çubuq verilmişdir. Bu çubuğun uclarına F qüvvəsi təsir edir (şəkil 1). Sadəlik üçün fərz olunur ki, çubuqdakı gərginlik vəziyyəti bir ox istiqamətindədir.



Şəkil 1. Çubuğun modeli.

Çubuğa monoton yüklənmə verildikdə onun materialı üçün gərginlik və deformasiya arasındakı əlaqə qeyri-xəttidir [4]:

$$\sigma = \phi(\varepsilon) \qquad (1)$$

Baxılan məsələ çubuğa F qüvvəsi ilə təsir etdikdə çubuğun nisbi uzunluğuna deformasiyasının təsirini araşdırmaqdan və bu deformasiyanın təyinindən ibarətdir.

(1) düsturunu aşağıdakı formada yazaq:

$$\sigma = E\varepsilon - \left[E\varepsilon - \phi(\varepsilon)\right]$$

və yaxud

$$\sigma = E\left[\varepsilon - \omega(\varepsilon)\varepsilon\right], \qquad (2)$$

burada

$$E\omega(\varepsilon)\varepsilon = E\varepsilon - \phi(\varepsilon).$$

(2) asılılığını asanlıqla qrafiki göstərmək olar (şəkil 2). Məlumdur ki,

$$\omega(\varepsilon) = 1 - \frac{\phi(\varepsilon)}{E\varepsilon} = \begin{cases} 0, \sigma \le \sigma_T; \\ \dfrac{AB - AC}{AB} = \dfrac{BC}{AB}, \sigma > \sigma_T. \end{cases}$$

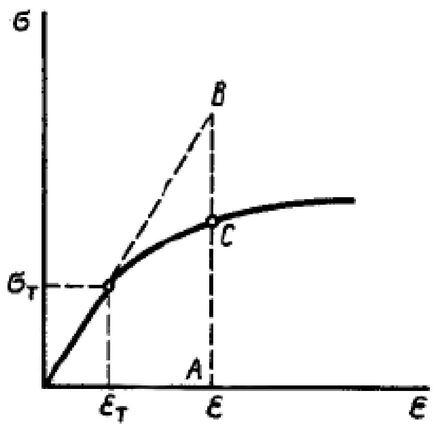
BC parçası deformasiyanın qiyməti sabit olduqda elastiki-plastiki çubuğun gərginliyinin elastiki çubuğun gərginliyindən nə qədər kiçik olduğunu göstərir. Deməli, $\omega(\varepsilon)$ funksiyası çubuğun materialının möhkəmlik dərəcəsini xarakterizə edir.

ε deformasiyasını σ gərginliyi və (2) tənliyindəki $\omega(\varepsilon)$ funksiyası ilə ifadə edək. Nəzərə alsaq ki,

$$\sigma = \frac{F}{A},$$

onda alarıq:

$$\varepsilon = \frac{F}{EA} + \omega(\varepsilon)\varepsilon.$$



Şəkil 2. Gərginlik və deformasiya arasındakı əlaqə.

F qüvvəsinin qiymətini qeyd etməklə, ε-nun hesablanmış qiymətlər ardıcıllığını quraq:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_0 = \frac{F}{EA}; \\ &\varepsilon_1 = \frac{F}{EA} + \omega(\varepsilon_0)\varepsilon_0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varepsilon_n = \frac{F}{EA} + \omega(\varepsilon_{n-1})\varepsilon_{n-1}, n > 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ε_0 başlanğıc yaxınlaşma olmaqla bərabər, eyni zamanda E elastiklik modulu və F qüvvəsinin verilmiş qiymətlərində elastiki çubuq üçün həll kimi də götürülür. Sonrakı hər bir addımda isə elastiki çubuq üçün yeni məsələ həll olunur. Bu zaman nəzərə alınır ki, çubuğa təsir edən F qüvvəsinin qiyməti dəyişilir. Onda aşağıdakı münasibəti yazmaq olar:

$$F^* = F + EA\omega(\varepsilon_{n-1})\varepsilon_{n-1}, n > 0.$$

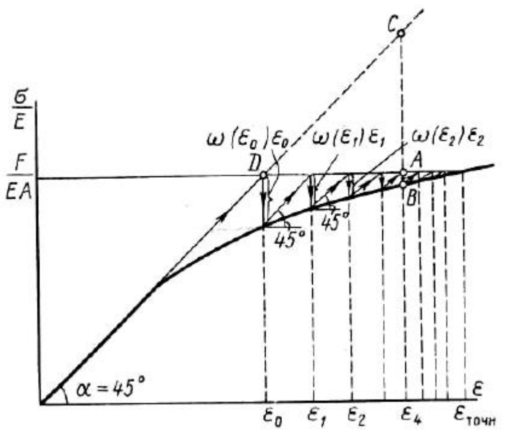
(3) həllər alqoritmi ilə qurulmuş ardıcıllıq qrafiki olaraq şəkil 3-də göstərilmişdir.

Doğrudan da, ε_n deformasiya qiyməti $CB = \omega(\varepsilon_n)\varepsilon_n$ parçasının qiyməti vasitəsilə tapılır və sonrakı yaxınlaşmada hesab olunur ki,

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0 + CB$$

və ya

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0 + DA + AB = \varepsilon_n + AB.$$



Şəkil 3. ε_n həllər alqoritmi ilə qurulmuş ardıcıllıq.

Şəkil 3-dən göründüyü kimi ardıcıl yaxınlaşma prosesi (iterasiya prosesi) deformasiyanın dəqiq qiymətinə yığılır. İterasiya prosesinin yığılması zamanı $\omega(\varepsilon)$ funksiyası kəsilməz hesab olunur və aşağıdakı şərti ödəyir:

$$0 \le \omega(\varepsilon) \le \omega(\varepsilon) + \varepsilon \frac{d\omega(\varepsilon)}{d\varepsilon} \le \lambda, \varepsilon > \varepsilon_T$$

, (4)

burada $\lambda < 1$ və sabitdir.

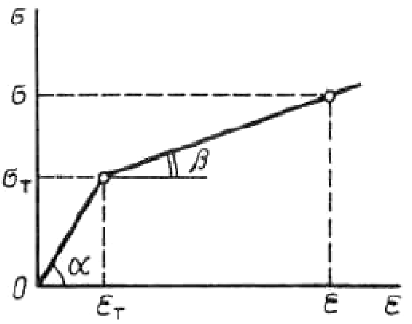
Ədədi hesablamalar

Nümunə olaraq çubuğun xətti möhkəmliyə malik olan materialının dartılma diaqramına baxaq (şəkil 4). Bu çubuq üçün gərginlik və deformasiya arasındakı asılılıq aşağıdakı kimi yazılır [5]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, \varepsilon \le \varepsilon_T; \\ \sigma_T + E_k(\varepsilon - \varepsilon_T), \varepsilon \ge \varepsilon_T, \end{cases}$$

(5)

burada $E = tg\alpha$, $E_{ki} = tg\beta$.



Şəkil 4. Çubuğun xətti möhkəmliyə malik olan materialının dartılma diaqramı.

(5) asılılığını (2) şəklində yazaq, bunun üçün (5) bərabərliyinin sağ tərəfinə $E\varepsilon$ hasilini əlavə edib, çıxaq:

$$\sigma = E\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\right]\varepsilon,$$

$\varepsilon \ge \varepsilon_T$ olduqda.

Beləliklə, alarıq:

$$\sigma = E[1 - \omega(\varepsilon)]\varepsilon,$$

burada

$$\omega(\varepsilon) = \begin{cases} 0, \varepsilon \le \varepsilon_T \\ \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{E_k}{E}\right), \varepsilon \ge \varepsilon_T \end{cases}.$$

Fərz edək ki, $\frac{F}{(EA)} = 0{,}002$; $\varepsilon_T = 0{,}001$.

Çubuğun materialının möhkəmlik dərəcəsinin, yəni $\frac{E_k}{E}$ nisbətinin iterasiya prosesinin yığılma sürətinə təsirini qiymətləndirmək üçün müvafiq hesablamalar aparılır və aşağıdakı cədvəl qurulur. Qeyd etmək lazımdır ki, ε_n qiymətləri $\frac{E_k}{E} = 0{,}5$ və $0{,}25$ hallarına uyğun olaraq hesablanmışdır.

Cədvəl

n	$E_k / E = 0{,}5;\ \varepsilon = 0{,}003$		$E_k / E = 0{,}25;\ \varepsilon = 0{,}005$	
	ε_n	xəta, %	ε_n	xəta, %
0	0,002	50	0,002	60
1	0,0025	16,67	0,00275	45
2	0,00275	8,33	0,0033125	33,75
3	0,002875	4,17	0,00373438	25,31
4	0,0029375	2,08	0,00405078	18,98
5	0,00296875	1,04	0,00428809	14,24
6	-	-	0,00446606	10,68
7	-	-	0,00459955	8,01
8	-	-	0,00469966	6,01
9	-	-	0,00477475	4,51
10	-	-	0,00483106	3,38
11	-	-	0,00487329	2,53
12	-	-	0,00490497	1,90
13	-	-	0,00492873	1,43
14	-	-	0,00494655	1,07

Cədvəldən göründüyü kimi möhkəmlik dərəcəsinin azalması ardıcıl yaxınlaşmaların sayının artmasına səbəb olur.

Sərhəd şərtlərini yalnız yerdəyişmələrdə verək $(u = v = w = 0)$ [6]. Fərz edək ki, gərginliklər aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

$$0 \le \omega(\varepsilon_u) < 1$$

və

$$0 \le \omega(\varepsilon_u) + \varepsilon_u \frac{d\omega(\varepsilon_u)}{d\varepsilon_u} \le 1 - \frac{k}{2G} = \lambda < 1,$$

$$\frac{d\omega(\varepsilon_u)}{d\varepsilon_u} \ge 0.$$

Onda elastiki həllər ardıcıllığı plastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin dəqiq həllinə yığılır.

Yuxarıda verilmiş sonuncu şərtin ödənildiyi aşağıdakı mülahizədən alınır. Belə ki, $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ diaqramı üçün toxunma əmsalı sıfırdan fərqli hesab olunur, yəni

$$\frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} \ge k > 0.$$

Digər tərəfdən isə

$$\frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} = 2G\left[1 - \omega(\varepsilon_u) - \varepsilon_u \frac{d\omega(\varepsilon_u)}{d\varepsilon_u}\right],$$

$$\frac{d\omega(\varepsilon_u)}{d\varepsilon_u} > 0.$$

Bu isə onu göstərir ki, sonuncu şərt ödənilir. Beləliklə, $\omega(\varepsilon_u)$ funksiyası yuxarıda verilmiş şərtləri ödəyir.

Nəticə

Hesablama prosesinin başlanğıc mərhələsi olan fiziki və riyazi modellərin düzgün qurulması çox əhəmiyyətlidir. Keyfiyyətsiz seçilmiş fiziki model heç vaxt uğurlu riyazi modelə gətirib çıxarmır. Keyfiyyətsiz riyazi model isə effektiv ədədi üsulun tətbiqinə imkan vermir. Bu səbəbdən "Ədədi üsullar" fənninin tədrisi prosesində müəllim təkcə proqram çərçivəsində olan mövzularla kifayətlənməməlidir. Tətbiqi elm sahələrindən götürülmüş elə mürəkkəb, lakin elmi-praktiki əhəmiyyət kəsb edən məsələlər vardır ki, onlar nəinki məlum üsulların tətbiqini tələb edir, həmçinin yeni ədədi üsulların yaradılmasına imkan verir. Sonda onu qeyd etmək lazımdır ki, tətbiqi elm sahələrindən götürülmüş praktiki məsələlərin təqribi hesablama üsulları vasitəsilə həll olunması tələbə və magistrləri fənn proqramından kənar mövzularla tanış edir. Bu tip mövzulardan sərbəst iş, kurs işi, həmçinin diplom işi mövzuları kimi də istifadə etmək olar.

Problemin aktuallığı. Texniki tərəqqi istehsalatda xarici təzyiqlərə davamlı materialların yaradılmasını tələb edir. Ona görə də elastikiyyət və plastikiyyət nəzəriyyələrinin inkişafı, qarşıya çıxan texniki problem və məsələlərin həll olunması, yeni həll üsullarının işlənib hazırlanması, məlum üsulların tətbiq olunma sferasının genişlənməsi hər vaxt aktualdır.

Problemin elmi yeniliyi. Təqdim olunan məqalədə əsas məqsəd "Ədədi üsullar" fənninin tədrisinin tətbiqi elm sahələri və riyazi modelləşdirmə ilə sıx bağlı olduğunu araşdırmaqdır. Aydındır ki, korrekt qoyulmuş tətbiqi məsələnin ardınca onun düzgün qurulmuş riyazi modeli gəlir. Bu isə öz növbəsində effektiv ədədi üsulun seçilməsini, lazım gələrsə, məlum ədədi üsulların modifikasiyalarının yaradılmasını tələb edir.

Problemin praktiki əhəmiyyəti. Praktikada riyazi modelləşdirmənin müxtəlif metodları tətbiq olunur. Real verilənlərin daxil olduğu modelləri öyrənərkən dinamik modelləşdirmədən, mürəkkəb sistem və hadisələri tədqiq edərkən isə təkamül, simulyasiya və kibernetik modelləşdirmədən istifadə olunur. Plastikiyyət nəzəriyyəsi məsələləri kifayət qədər mürəkkəb və mücərrəd olduqlarından, onların riyazi modelləri tədqiq olunan orijinalın xassələrini düzgün (adekvat) əks etdirməlidir. Bu səbəbdən qarşıya qoyulmuş məsələnin həlli üçün keyfiyyətli (hesablama xətasının çox kiçik olması) ədədi üsulun istifadə olunması olduqca əhəmiyyətlidir. Məqalədən ali məktəb müəllimləri, tələbələr, magistrant və doktorantlar faydalana bilərlər.

Ədəbiyyat:

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение -М.: Мир, -1998. -575 с
2. Турчак Л.И. Основы численных методов. / Турчак Л.И. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
3. Баженов В.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г., Гоник Е.Г. Экспериментальное исследование упругопластического выпучивания подкрепленных цилиндрических оболочек с

заполнителем под действием поперечных сил. Вестник Чувашского Государственного Педагогического Университета им. И. Я. Яковлева, серия: механика предельного состояния, -2018, № 3 (37), -с.107-116.

4. Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости овальных и эллиптических цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Изв. РАН., Мех. тверд. Тела, -2009, № 5, -с.127-134.
5. Щербо А.Г. Основы теории упругости и пластичности. Учебно-методический комплекс. «Промышленное и гражданское строительство», -Новополоцк, 2008, -240 с.
6. Шуп, Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике. / Т.Е. Шуп – М.: Высш. шк., 1990. – 255с.

E-mail: laura_fat@rambler.ru
E-mail: nzkt.0304@mail.ru
Redaksiyaya daxil olub: 07.10.2024.