UOT 372.851

Əlişah Əzizxan oğlu Eyyubov
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin
Şamaxı filialının baş müəllimi
https://orcid.org / 0000-0001-7467-5965
https://doi.org/10.69682/arti.2024.91(6).170-173

BUCAQLARA AİD BƏZİ DÜSTURLARIN İSBATI

Алишах Азизхан оглы Эйюбов
старший преподаватель Шамахинского филиала
Азербайджанского Государственного Педагогического Университета

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ, ОТНОСЯЩИХСЯ К УГЛАМ

Alishah Azizkhan Eyyubov
Head teacher of Shamakhi branch of Azerbaijan State Pedagogical University

PROOF OF SOME FORMULAS RELATING TO ANGLES

Xülasə. Məktəb riyaziyyat kursunda bucaqlara aid çoxlu düsturlar isbatsız olaraq şagirdlərə verilir. Bunlara nümunə olaraq iti bucağa adi düsturlar, saat əqrəblərinin arasındakı bucağın təyin edilməsi, bucağın daxilindəki nöqtənin bucağın təpəsinə qədər məsafənin təyini və sair misal göstərmək olar.

İti və kor bucaq daxilində götürülmüş nöqtədən təpə nöqtəyə qədər məsafə maraq doğuran hallardan biridir. Bu məsafəni təyin etmək üçün əvvəlcə iti bucaq daxilində götürülmüş nöqtədən təpə nöqtəsinə qədər məsafə üçün düstur təyin edilmişdir. Sonra kor bucağ halına baxılır. Hər iki hal üçün düsturun təyin edilməsi və isbatı göstərilmişdir.

Beləliklə şagirdlərə verilən düsturların isbatı onlarda maraq doğurur. Bu düsturlardan istifadə etmək bacarığı artır, məntiqi təfəkkürləri inkişaf edir.
Açar sözlər: *Bucaq, iti, kor, məsafə, isbat*

Аннотация. В школьном курсе математики ученикам без доказательств задаются многие формулы, связанные с углами. В качестве примеров можно указать обычные формулы острого угла, определение угла между стрелками часов, определение расстояния от точки внутри угла до вершины угла и так далее. Интерес представляет расстояние от точки до вершины, взятое в пределах острого и слепого угла. Для определения этого расстояния сначала определяют формулу расстояния от точки, взятой в пределах острого угла, до вершины. Затем рассматривается случай слепого угла. Показаны определение и доказательство формулы для обоих случаев.

Таким образом, доказательство формул, данное учащимся, вызывает у них интерес. Повышается умение пользоваться этими формулами, развивается логическое мышление.
Ключевые слова: *Угол, острый, слепой, расстояние, доказательство*

Abstract. In the school mathematics course, many formulas for angles are given to students without proof. Examples of these are the usual formulas for an acute angle, determination of the angle between the hands of the clock, determination of the distance from the point inside the angle to the top of the angle, and so on.

The distance from a point to a vertex taken within an acute and blind angle is one of interest. To determine this distance, the formula for the distance from the point taken within the acute angle to the vertex is first determined. Then the case of blind angle is considered. The determination and proof of the formula for both cases are shown.

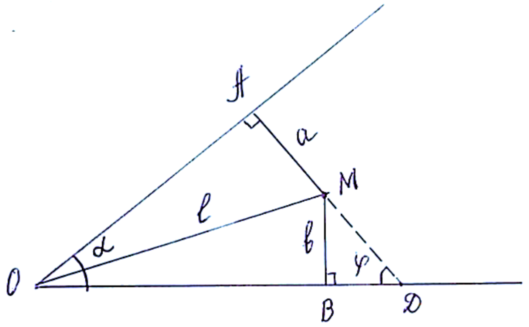
Thus, the proof of the formulas given to students arouses interest in them. The ability to use these formulas increases, logical thinking develops.
Keywords*: Angle, sharp, blind, distance, proof*

Məktəb riyaziyyat kursunda bucaqlara aid çoxlu düsturlar hazır şəkildə şagirdlərə verilir. Bunlardan həndəsənin əsaslarında, üçbucaqlara, çevrəyə və çoxbucaqlılara və s. aid düsturlar verilir. Bunlardan biri iti və kor bucaq daxilində götürülmüş nöqtədən bucağın təpə nöqtəsinə qədər məsafəyə aid düstur təyin edilmişdir və isbatı yerinə yetirilir.

İxtiyari α iti bucağının daxilində verilmiş nöqtədən bucağın tərəflərinə qədər məsafələr $a\ və\ b$ olarsa həmin nöqtədən bucağın təpə nöqtəsinə qədər olan məsafəni aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$l=\sqrt{a^2+\frac{\left(a+\frac{b}{\sin(90^0-\alpha)}\right)^2}{\frac{1}{[\sin(90^0-\alpha)]^2}-1}}$$

İsbatı: İxtiyari iti α bucağı götürüb, onun daxilində bir M nöqtəsi qeyd edirik. Həmin nöqtədən bucağın tərəflərinə qədər $AM=a\,; MB=b$ məsafələrini çəkirik, O nöqtəsi ilə M nöqtəsini birləşdiririk. Axtarılan məsafə isə OM-ə bərabərdir.



Bunun üçün AM düz xəttinin bucağın digər tərəfi ilə kəsişən uzantısını çəkirik və kəsişmə nöqtəsini D hərfi ilə işarə edirik. $OAD\ və\ MBD$ hər ikisi düzbucaqlı üçbucaqlardır. Buradan biz $\angle ADO$ bucağını təyin edə bilərik. Həmin bucaq $\angle ADO=90^0-\alpha$; $90^0-\alpha=\gamma$ işarə edək. Düzbucaqlı üçbucaqda iti bucağın sinusunun tərifinə görə aşağıdakı münasibəti yazırıq:

$$sin\varphi=\frac{OA}{OD}:\Rightarrow OD=\frac{OA}{sin\varphi}$$

$$sin\varphi=\frac{MB}{MD}=\frac{b}{MD}:\Rightarrow MD=\frac{b}{sin\varphi}$$

$$AD=AM+MD\ olduğundan$$

$$AD=AM+MD=a+\frac{b}{sin\varphi}$$

$\Delta OAM\ və\ \Delta OAD$ düzbucaqlı üçbucaq olduğundan

$$|OM|^2=|AM|^2+|OA|^2\ və\ |OA|^2=|OD|^2-|AD|^2$$

$$|OA|^2=|OD|^2-|AD|^2-dən$$

$$OA^2=\left(\frac{OA}{sin\varphi}\right)^2-\left(a+\frac{b}{sin\varphi}\right)^2$$

$$=OA^2\cdot\frac{1}{(sin\varphi)^2}-\left(a+\frac{b}{sin\varphi}\right)^2$$

$$\left(a+\frac{b}{sin\varphi}\right)^2=OA^2\left(\frac{1}{(sin\varphi)^2}-1\right)$$

Buradan alınır ki, $OA=\sqrt{\frac{\left(a+\frac{b}{sin\varphi}\right)^2}{\left(\frac{1}{(sin\varphi)^2}-1\right)}}$

$|OM|^2=|AM|^2+|OA|^2$ olduğundan

$$|OM|^2=a^2+\frac{\left(a+\frac{b}{sin\varphi}\right)^2}{\left(\frac{1}{(sin\varphi)^2}-1\right)}:$$

$$\Rightarrow OM\sqrt{a^2+\frac{\left(a+\frac{b}{sin\varphi}\right)^2}{\left(\frac{1}{(sin\varphi)^2}-1\right)}}$$

$\varphi=90^0-\alpha$ işarə etdiyimizdən düsturda $\varphi-nın\ əvəzinə$ $(90^0-\alpha)$ qiymətini yazırıq. Onda düstur

$$OM=\sqrt{a^2+\frac{\left(a+\frac{b}{\sin(90^0-\alpha)}\right)^2}{\frac{1}{[\sin(90^0-\alpha)]^2}-1}}$$

Alırıq.

Xüsusi hal olaraq $\alpha=30^0$ olanda

$$OM=2\sqrt{\frac{1}{3}\,a^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\,ab+\frac{1}{3}b^2}$$

$\alpha=45^0$ olanda

$$OM=\sqrt{2a^2+2\sqrt{2}\,ab+2b^2}$$

$\alpha=60^0$ olanda

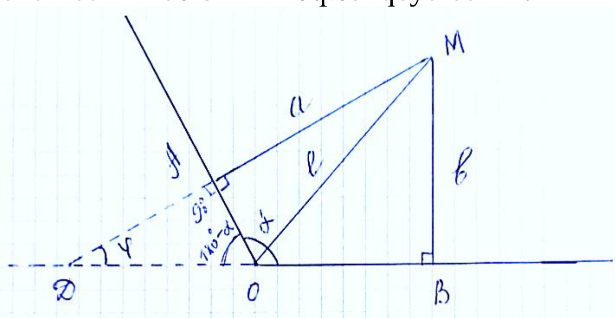
$$OM=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$$

Beləliklə iti bucağın daxilindəki nöqtədən bucağın təpəsinə qədər məsafə düsturu təyin edildi. Düsturda bucağın xüsusi hallarına baxdıq. Belə ki, triqonometrik funksiyaların məlum cədvəl bucaqlarının qiymətlərinə uyğun hesablamalar yerinə yetirməklə düsturun xüsusi hallarını aldıq. İndi bucağın kor bucaq olduğu halına baxaq.

İxtiyari α kor bucağının daxilində verilmiş nöqtədən bucağın tərəfinə qədər məsafələr a $və$ b olarsa həmin nöqtədən bucağın təpə nöqtəsinə olan məsafəni aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$l = \sqrt{a^2 + \frac{(\frac{b}{\sin(\alpha - 90^0)} - a)^2}{\frac{1}{[\sin(\alpha - 90^0)]^2} - 1}}$$

İsbatı: İxtiyari α kor bucağı götürüb və onun daxilində bir M nöqtəsi qeyd edirik.



Həmin nöqtədə bucağın tərəflərinə qədər $AM = a$; $MB = b$ məsafələrini çəlirik. O nöqtəsi ilə M nöqtəsini birləşdiririk. OM parçasının uzunluğu axtarılan məsafə olur.

Bunun üçün AM düz xəttinin bucağın digər tərəfinin əksinə uzantısı ilə kəsişmə nöqtəsini tapırıq və onu D hərfi ilə işarə edirik.

Alınan üçbucaqlardan OAD $və$ MBD-nin hər ikisinin düzbucaqlı olduğu asanlıqla görünür. Bundan biz $\angle ADO$ bucağını təyin edə bilərik. Həmin bucaq $\angle ADO = \alpha - 90^0$; $\alpha - 90^0 = \varphi$ işarə edək. Düzbucaqlı üçbucaqda iti bucağın sinusunun tərifinə görə aşağıdakı münasibəti yazarıq:

$$sin\varphi = \frac{OA}{OD}: \Rightarrow OD = \frac{OA}{sin\varphi}$$

$$sin\varphi = \frac{MB}{MD} = \frac{b}{MD}: \Rightarrow MD = \frac{b}{sin\varphi}$$

$AD = MD - AM$ olduğundan

$$AD = MD - AM = \frac{b}{sin\varphi} - a$$

ΔOAM $və$ ΔOAD düzbucaqlı üçbucaqlar olduğundan aşağıdakı münasibəti yaza bilərik. $|OM|^2 = |AM|^2 + |OA|^2$; $və$ $|OA|^2 = |OD|^2 - |AD|^2$

$$|OA|^2 = |OD|^2 - |AD|^2 - dən$$

$$OA^2 = \left(\frac{OA}{sin\varphi}\right)^2 - \left(\frac{b}{sin\varphi} - a\right)^2$$

$$= OA^2 \cdot \frac{1}{(sin\varphi)^2} - \left(\frac{b}{sin\varphi} - a\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{sin\varphi} - a\right)^2 = OA^2 \cdot \frac{1}{(sin\varphi)^2} - OA^2$$

$$OA = \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{sin\varphi} - a\right)^2}{\frac{1}{(sin\varphi)^2} - 1}}$$

$|OM|^2 = |AM|^2 + |OA|^2$ olduğundan

$$|OM|^2 = |AM|^2 + |OA|^2 = a^2 + \frac{\left(\frac{b}{sin\varphi} - a\right)^2}{\frac{1}{(sin\varphi)^2} - 1}$$

$$OM = \sqrt{a^2 + \frac{\left(\frac{b}{sin\varphi} - a\right)^2}{\frac{1}{(sin\varphi)^2} - 1}}$$

Əvvəldə $\varphi = \alpha - 90^0$ işarə etdiyimizdən düsturu belə yazarıq.

$$OM = \sqrt{a^2 + \frac{(\frac{b}{\sin(\alpha - 90^0)} - a)^2}{\frac{1}{[\sin(\alpha - 90^0)]^2} - 1}}$$

Xüsusi hal olaraq $\alpha = 120^0$ olarsa

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{4}{3}b^2}$$

$\alpha = 135^0$ olanda

$$l = \sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ab + 2b^2}$$

$\alpha = 150^0$ olanda

$$l = \sqrt{\frac{4}{3}a^2 - \frac{4}{3\sqrt{3}}ab + \frac{4}{9}b^2}$$

Burda da alınmış düsturda kor bucağın xüsusi hallarına baxıldı. Baxılmış bu bucaqlar üzərində çevirmə düsturları yerinə yetirilib, məsafə üçün xüsusi hallara aid düsturlar alınıb.

Problemin elmi yeniliyi. Məktəb riyaziyyatında bucaqlara aid çoxlu hazır düsturlar şagirdlərin ixtiyarına verilir. Bunlardan bəzisinin isbatı ilə məşğul olmuşdur.

Problemin praktik əhəmiyyəti. Şagirdlərə verilən hazır düsturlardan məsələ həllində istifadə edilir. Hamısının isbatını bilməsələr də onlardan istifadə etməyi bacarır və müxtəlif tətbiqlərinə nail olurlar.

Problemin aktuallığı. Bucağın daxilində götürülmüş nöqtədən şagirdlərdə digər hazır düsturların isbatına maraq yaradır. Bu maraq onların təfəkkürlərinin inkişafına kömək edir.

Ədəbiyyat:
1. R. Əliməmmədov. Riyaziyyat. Bakı, 2010. - s.150-156
2. Mərdanov M.G. Yaqubov M.H. və. b. Həndəsə: orta məktəb şagirdləri üçün dərsliklər. -Bakı, 2003 – 2007- 99 – 120 s.
3. Tağıyeva S., Dolxanova Cəmil-Cahid, Əliqamət K. Əsas həndəsi anlayışlar və tekliflər. Bakı, 2023. s. 26

E-mail: elishaheyyubov@mail.com
Redaksiyaya daxil olub: 31.10.2024