UOT 372.851

Musa Tapdıq oğlu Rzayev
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
https://orcid.org/ 0000-0002-5141-177X
https://doi.org/10.69682/arti.2024.91(6).174-181

Aysel Akif qızı Mayılova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
https://orcid.org/ 0009-0002-3974-9943

ÜÇBUCAQLARIN HƏLLİNDƏ SFERİK TRİQONOMETRİYADAN İSTİFADƏ VASİTƏ KİMİ

Муса Тапдыг оглу Рзаев
доктор философии по педагогике
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

Айсель Акиф гызы Маилова
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ КАК СРЕДСТВА РЕШЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Musa Tapdig Rzayev
doctor of philosophy in pedagogy
Azerbaijan State Pedagogical University

Aysel Akif Mayilova
Azerbaijan State Pedagogical University

USING SPHERICAL TRIGONOMETRY AS A TOOL IN SOLVING TRIANGLES

Xülasə. Məqalədə orta ümumtəhsil məktəblərinin riyaziyyat təlimində əsas mövzulardan biri olan üçbucaqlar mövzusundan bəhs edilir. Üçbucaqların sferik triqonometriyadan istifadə edərək həlli yolları əlaqəli şəkildə öyrənilməsi nümunələr əsasında göstərilir. Qeyd etmək lazımdır ki, "Həndəsə" məzmun xəttində üçbucaqlar mövzusuna aid məsələlərin həllində sferik triqonometriyanın və ya məlum teoremlərin tətbiqi yollarından istifadə edərək öyrənilməsi bir daha təkrar mənimsənilir.

Məqalə elementar riyaziyyat və riyaziyyatın tədrisi metodikasından mühazirə deyən və seminar məşğələləri aparan ali məktəb müəllimləri, orta məktəb müəllimləri, habelə tədqiqatçılar üçün faydalı olacaqdır.

Açar sözlər: *sfera, triqonometriya, bucaq, üçbucaq, dairə, qövs, çəpbucaqlı, teorem, isbat, sahə, anlayış, tərif.*

Аннотация. В статье рассматривается тема треугольников, которая является одной из основных тем в математическом образовании средней школы. На основе примеров показано соответствующее исследование решений треугольников с помощью сферической тригонометрии. Следует отметить, что по направлению «Геометрия» вновь осваивается изучение сферической тригонометрии или применение известных теорем при решении задач, связанных с темой треугольников.

Статья будет полезна преподавателям вузов, учителям средней школы, а также научным работникам, читающим лекции и ведущим семинары по элементарной математике и методике преподавания математики.

Ключевые слова: *сфера, тригонометрия, угол, треугольник, круг, дуга, диагональ, теорема, доказательство, площадь, понятие, определение*

Abstract. The article deals with the topic of triangles, which is one of the main topics in mathematics education of secondary schools. A related study of the solutions of triangles using spherical trigonometry is shown on the basis of examples. It should be noted that in the "Geometry" content line, the study of spherical trigonometry or the application of well-known theorems is mastered again and again in solving problems related to the topic of triangles.

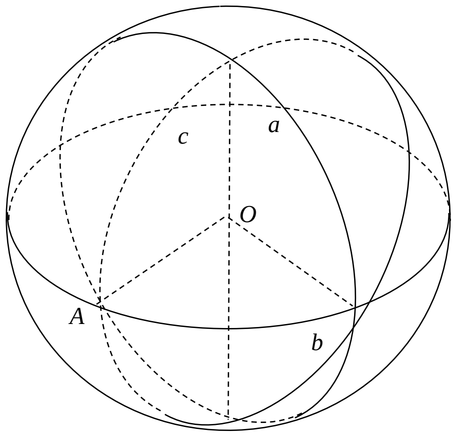
The article will be useful for high school teachers, secondary school teachers, as well as researchers who give lectures and conduct seminars on elementary mathematics and mathematics teaching methodology.

***Keywords**: Sphere, trigonometry, angle, triangle, circle, sphere, arc, diagonal, theorem, proof, area, concept, definition.*

Sfera üzərində triqonometriya və ya sferik triqonometriya bildiyimiz müstəvi üzərində olan triqonometriyadan onunla fərqlənir ki, burada sfera üzərində götürülmüş və tərəfləri kürənin böyük dairə kəsiklərinin qövsləri olan üçbucaqların-sferik üçbucaqların həllindən danışılır.

Sferik triqonometriyan astronomiya, geodeziya və topoqrafiya elmlərində istifadə edilir.

R radiuslu kürə üzərində bir istiqamətdə olmayan A, B və C nöqtələrini götürüb, bu nöqtələrin hər cütündən böyük dairə keçirək. Bu üç böyük dairənin kəsişməsindən kürənin üzərində müəyyən bir ABC sferik üçbucağı alınır. Alınan bu üçbucağa eyni zamanda mərkəzi üçüzlü bucağın təpəsində olan kürə səthi ilə üçüzlü bucağın üzlərinin kəsişməsindən alınan üçbucaq kimi də baxmaq olar (şəkil 1).



Şəkil 1

Sferik üçbucaqda hər bir tərəf digər iki tərəfin cəmindən kiçik $a + b > c$, $a + c > b$, $c + b > a$ və hər bir tərəf digər iki tərəfin fərqindən böyükdür: $b > a - c$, $a > b - c$, $c > a - b$.

Sferik üçbucağın tərəfləri qövs olduğundan dərəcələrlə ölçülür və bu tərəflərin cəmi 360^0-dən kiçikdir: $a + b + c < 360^0$

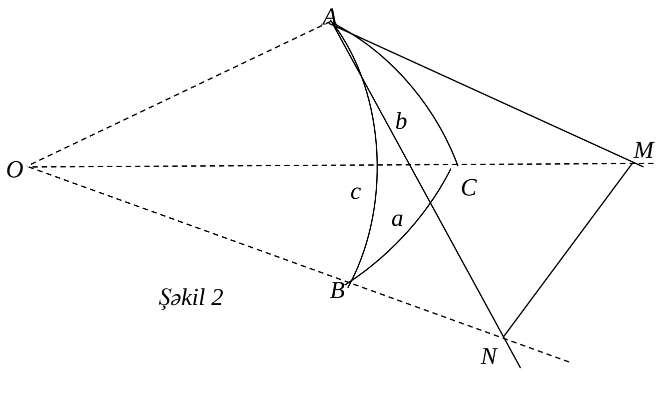
a, b, c eyni zamanda sferik üçbucağı əmələ gətirən üçüzlü bucağın müstəvi bucaqlarıdır.

İstənilən sferik üçbucaqda daxili bucaqların cəmi 540^0-dən kiçik və 180^0-dən böyükdür: $180^0 < A + B + C < 540^0$

Müstəvi üzərindəki üçbucaqların bərabərliyinin üç əlaməti sferik üçbucaqlar üçün doğrudur.

Bundan başqa uyğun bucaqları bərabər və bir kürə üzərində olan sferik üçbucaqlar bərabərdir.

Sferik triqonometriyanın əsas düsturları. Sferik triqonometriyanın əsas düsturları sferik üçbucağın üç və ya dörd məlum elementinə görə qalan dördüncü və beşinci elementi tapmağa imkan verən riyazi ifadələrdir. ABC sferik üçbucağını götürək.



Şəkil 2

A, B və C nöqtələrini O mərkəzi ilə birləşdirək (şəkil 2).

A nöqtəsindən sferik üçbucağın AB və AC tərəflərinə toxunan keçirək. A bucağının qiyməti bu toxunanlar arasındakı bucağın qiymətidir. İsbatın aydınlığı üçün b və c bucaqlarının birini 90^0-dən kiçik hesab edək. Belə olduqda A nöqtəsinə toxunan düz xətlər OC və OB radiuslarının uzantısını M və N nöqtələrində kəsəcəkdir. Planimetriyadan bildiyimiz kimi AMN üçbucağından:

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cdot cosA \ (1)$$

OMN üçbucağından isə:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot cos\alpha \ (2)$$

olduğunu yaza bilərik. (1) və (2) bərabərliklərindən:

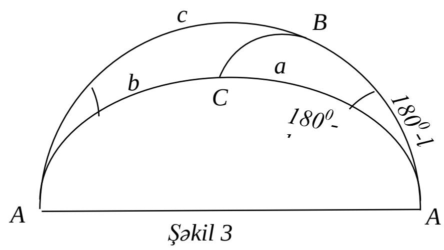
$AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cdot cosA = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot cos\alpha$, və buradan da $2OM \cdot ON \cdot cos\alpha = OM^2 + ON^2 - AN^2 - AM^2 + 2AN \cdot AM \cdot cosA$ alınır. OMA üçbucağından $OA^2 = OM^2 - AM^2$, ONA üçbucaöından isə $OA^2 = ON^2 - AN^2$ olur. Axırıncı iki bərabərliyi nəzərə alsaq, $2OM \cdot ON \cdot cos\alpha = 2OA^2 + 2AN \cdot AM \cdot cosA$ olur. Hər iki tərəfi $2OM \cdot ON$ -ə bölsək $cosa = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OA}{ON} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cdot cosA$ alınır. Şəkildən aydındır ki, $\frac{OA}{OM} = cosb, \frac{OA}{ON} = cosc, \frac{AN}{ON} = sinc, \frac{AM}{OM} = sinb.$

Bu qiymətləri sonuncu bərabərlikdə yerinə yazsaq:

$$cosa = cosb \cdot cosc + sinb \cdot sinc \cdot cosA \quad (3)$$

alarıq.

İndi fərz edək ki, b və c bucaqlarının hər biri 90^0-dən böyükdür. Sferik üçbucağın b və c tərəflərini bir-biri ilə kəsincəyə qədər uzadaq (şəkil 3).



Şəkil 3

Bu tərəflər kürə üzərində A_1 nöqtəsində birləşəcəkdir.

Üçbucağın tərəfləri böyük dairənin qövsləri olduğu üçün $\angle A_1 = cosA$ olacaqdır. Alınmış ikinci BCA_1 sferik üçbucağında $(180^0 - b) < 90^0$, $(180^0 - c) < 90^0$ olacaqdır. BCA_1 sferik üçbucağı üçün (3) düsturunu yazaq:

$$cosa = cos(180^0 - b) \cdot cos(180^0 - c) + sin(180^0 - b) \cdot sin(180^0 - c) \cdot cosA_1$$

Burada $cos(180^0 - b) = cosb$ və ya $sin(180^0 - b) = sinb$ triqonometrik çevirmələrdən istifadə edərək yenə də (3) düsturunu alırıq. (3) düsturunu b və c tərəfləri üçün də uyğun olaraq yaza bilərik:

$$cosb = cosc \cdot cosa + sinc \cdot sina \cdot cosB \quad (4)$$
$$cosc = cosb \cdot cosa + sinb \cdot sina \cdot cosC \quad (5)$$

Sferik üçbucağın bir tərəfinin kosinusu qalan iki tərəfin kosinusları hasili ilə bu tərəflərin sinuslarının həmin tərəflər arasındakı bucağın kosinusu hasilinin cəminə bərabərdir.

(3), (4) və (5) düsturları sferik üçbucaq üçün kosinuslar düsturu adlanırlar. Bu düsturlardan istifadə edərək sferik üçbucaq üçün sinuslar düsturunu çıxaraq. (3) və (4) düsturlarından, $cosa - cosb \cdot cosc = sinb \cdot sinc \cdot cosA$; $cosb - cosc \cdot cosa = sinc \cdot sina \cdot cosB$ yaza bilərik. Bu iki bərabərliyin hər iki tərəfinin kvadratlarını götürək:

$cos^2a + cos^2b \cdot cos^2c - 2cosa \cdot cosb \cdot cosc = sin^2b \cdot sin^2c \cdot cos^2A$;

$$cos^2b + cos^2a \cdot cos^2c - 2cosc \cdot cosb \cdot cosa = sin^2a \cdot sin^2c \cdot cos^2B$$

Bunları tərəf-tərəfə çıxsaq:

$cos^2a - cos^2b + cos^2b \cdot cos^2c - cos^2c \cdot cos^2a = sin^2b \cdot sin^2c \cdot cos^2A - sin^2c \cdot sin^2a \cdot cos^2B$ və ya

$cos^2a \cdot (1 - cos^2c) - cos^2b \cdot (1 - cos^2c) = sin^2c \cdot (sin^2b \cdot cos^2A - sin^2a \cdot cos^2B)$ yaxud

$cos^2a \cdot sin^2c - cos^2b \cdot sin^2c = sin^2c \cdot (sin^2b \cdot cos^2A - sin^2a \cdot cos^2A)$ alaraq. Hər iki tərəfi sin^2c-yə ixtisar etsək, $cos^2a - cos^2b = sin^2b \cdot cos^2A - sin^2a \cdot cos^2B$ alarıq. Bu bərabərlikdə kosinusların hamısını sinuslarla əvəz edək;

$(1 - sin^2a) - (1 - sin^2b) = sin^2b \cdot (1 - sin^2A) - sin^2a \cdot (1 - sin^2B)$ və ya $-sin^2a + sin^2b = sin^2b - sin^2b \cdot sin^2b \cdot sin^2A - sin^2a + sin^2a \cdot sin^2B$ ixtisardan sonra isə $sin^2b \cdot sin^2A = sin^2a \cdot sin^2B$ və ya $\frac{sin^2a}{sin^2b} = \frac{sin^2A}{sin^2B}$ yaxud $\frac{sinA}{sina} = \frac{sinB}{sinb}$ alarıq.

Götürdüyümüz üçbucaqda tərəflərin uzunluğunu 90^0-dən kiçik fərz etdiyimizdən kəsrin qabağında, kvadrat kök aldıqdan sonra bir işarə yazmadıq.

Yuxarıdakı qayda ilə $\frac{sinA}{sina} = \frac{sinC}{sinc}$ bərabərliyini də ala bilərik. Beləliklə,

$$\frac{sinA}{sina} = \frac{sinB}{sinb} = \frac{sinC}{sinc} \quad (6)$$

sinuslar düsturunu alırıq.

Sferik üçbucaqda, müstəvi üzərində olan üçbucaqdan fərqli olaraq, məlum daxili bucaqların vasitəsilə hər hansı tərəfin uzunluğunu tapmaq mümkündür.

(5) düsturundan $cosc$-nin qiymətini (3) və (4) düsturlarında yerinə yazaq:

$$cosa = cosb(cosa \cdot cosb + sina \cdot sinb \cdot cosC) + sinb \cdot sinc \cdot cosA \ (7)$$

$$cosb = cosa(cosa \cdot cosb + sina \cdot sinb \cdot cosC) + sina \cdot sinb \cdot cosB \ (8)$$

(7) düsturundan

$cosa = cosa \cdot cos^2 b + cosb \cdot sina \cdot sinb \cdot cosC + sinb \cdot sinc \cdot cosA,$

$cosa \cdot (1 - cos^2 b) = (cosb \cdot sina \cdot cosC + sinc \cdot cosA) \cdot sinb,$

$$cosa \cdot sin^2 b = (cosb \cdot sina \cdot cosC + sinc \cdot cosA) \cdot sinb$$

və ya

$$cosa \cdot sinb = cosb \cdot sina \cdot cosC + sinc \cdot cosA \ (9)$$

Eyni qayda ilə (8) bərabərliyindən:

$$cosb \cdot sina = cosa \cdot sinb \cdot cosC + sinc \cdot cosB \ (10)$$

alırıq.

Sinuslar düsturundan

$\frac{sina}{sinA} = \frac{sinb}{sinB} = \frac{sinc}{sinC} = m, sina = m \cdot sinA, sinb = m \cdot sinB, sinc = m \cdot sinC$

yaza bilərik. (9) və (10) ifadələrində sinusları əvəz edib, m-ə ixtisar etsək:

$$cosa \cdot sinB = cosb \cdot sinA \cdot cosC + sinC \cdot cosA \ (11)$$

$$cosb \cdot sinA = cosa \cdot sinB \cdot cosC + sinC \cdot cosB \ (12)$$

alarıq.

(12)-dən $cosb \cdot sinA$-nın (11)-də yazaq:

$cosa \cdot sinB = cosa \cdot sinB \cdot cos^2 C + sinC \cdot cosB \cdot cosC + sinC \cdot cosA,$

$cosa \cdot sinB \cdot (1 - cos^2 C) = sinC \cdot cosB \cdot cosC + sinC \cdot cosA,$

$$cosa \cdot sinB \cdot sin^2 C = sinC \cdot cosB \cdot cosC + sinC \cdot cosA$$

Hər tərəfi $sinC$-yə ixtisar etsək $cosa \cdot sinB \cdot sinC = cosB \cdot cosC + cosA$

buradan da

$$cosa = \frac{cosB \cdot cosC + cosA}{sinB \cdot sinC} \ (13)$$

alarıq. Analoji olaraq:

$$cosb = \frac{cosA \cdot cosC + cosB}{sinA \cdot sinC} \ (13')$$

$$cosc = \frac{cosA \cdot cosB + cosC}{sinA \cdot sinB} \ (13'')$$

yazmaq olar.

Düzbucaqlı sferik üçbucağın həllinə aid düsturlar. Sferik üçbucaqda bucaqlardan biri, məsələn, $A = 90^0$ olsun. Bu zaman $cosA = 0$ olmaqla (3) düsturundan $cosa = cosb \cdot cosc$ (14) bərabərliyini alırıq. Bu bərabərlik sferik düzbucaq üçün Pifaqor teoremidir. Yəni düzbucaqlı sferik üçbucaqda hipetonuzun kosinusu katetlərin kosinusları hasilinə bərabərdir.

$A = 90^0$ olduqda $sinA = 1$ olur. Bu zaman sinuslar düsturundan: $\frac{sina}{sinb} = \frac{1}{sinB}$ olur. Buradan,

$$sinb = sina \cdot sinB \ (15)$$

və eyni qayda ilə

$$sinc = sina \cdot sinC \ (16)$$

yazırıq.

Hər hansı katetin sinusu hipetonuzun sinusu ilə bu katet qarşısındakı bucağın sinusu hasilinə bərabərdir.

Bundan başqa düzbucaqlı sferik üçbucağın həlli üçün aşağıdakı düsturlardan da istifadə edilir. Biz bu düsturları hazır veririk.

$$tgc = tga \cdot cosB \ (17)$$

$$tgb = tga \cdot cosC \ (18)$$

Düzbucaqlı sferik üçbucaqda hər katetin tangensi hipotenuzun tangensi ilə yanaşı bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir.

$$tgc = sinb \cdot tgB \ (19)$$
$$tgc = sinb \cdot tgC \ (20)$$

Katetlərdən birinin tangensini o biri katetin sinusu ilə bu katetin qarşısındakı bucağın tangensi hasilinə bərabərdir.

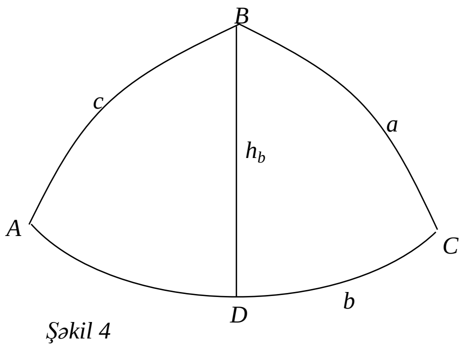
$$cosa = ctgB \cdot ctgC \ (21)$$

Hipetonuz üzərindəki bucaqların kotengensləri hasili hipetonuzun kosinusuna bərabərdir.

$$cosB = sinC \cdot cosb \ (22)$$
$$cosC = sinB \cdot cosc \ (23)$$

Bucaqlardan birinin kosinusu digərinin sinusu ilə bu bucaq qarşısındakı tərəfin kosinusu hasilinə bərabərdir.

Sferik üçbucağın təpəsindən keçən və qarşıdakı tərəfinə perpendikulyar olan böyük dairənin qövsünə sferik üçbucağın hündürlüyü deyilir.



Şəkil 4

ABD və BCD düzbucaqlı sferik üçbucaqlardan (şəkil 4).

$$sinh_a = sinc \cdot sinA = sina \cdot sinC \ (24)$$
$$sinh_b = sinb \cdot sinC = sinc \cdot sinB \ (25)$$

(24) düsturunu $sinb$-yə (25) düsturunu $sina$-ya vuraq:

$$sinb \cdot sinh_b = sinb \cdot sinc \cdot sinA$$
$$sina \cdot sinh_a = sina \cdot sinb \cdot sinC$$

Alarıq. Sinuslar düsturundan $\frac{sina}{sinA} = \frac{sinc}{sinC}$; $sinc \cdot sinA = sina \cdot sinC$ nəzərə alsaq

$$sinb \cdot \ sinh_b = sinb \cdot sina \cdot sinC$$
$$sina \cdot \ sinh_a = sinb \cdot sina \cdot sinC$$

və ya

$$sinb \cdot \ sinh_b = sina \cdot \ sinh_a$$

bərabərliyini alarıq.

Deməli, hər hansı sferik üçbucaqda bir tərəfin sinusu ilə bu tərəfə endirilmiş hündürlüyün sinusu hasili sabitdir.

Çəpbucaqlı sferik üçbucağın həlli üçün bəzi düsturlar. Yuxarıdan məlum olan (3) nömrəli düstru götürək:

$$cosa = cosb \cdot \ cosc + sinb \cdot sinc \cdot cosA \ (3)$$

Buradan,

$$cosA = \frac{cosa - cosb \cdot cosc}{sinb \cdot sinc} \ (27)$$

eyni qayda ilə də

$$cosB = \frac{cosb - cosa \cdot cosc}{sinb \cdot sina} \ (28)$$
$$cosC = \frac{cosc - cosa \cdot cosb}{sinb \cdot sina} \ (29)$$

alarıq. Məlum, $sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$ düsturunu və $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2(p - c)$, $a - b + c = 2(p - b)$, $b + c - a = 2(p - a)$ bərabərliklərini nəzərə alsaq asanlıqla

$$sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \cdot \sin(p-c)}{sinb \cdot sinc}} \ (30)$$

$$sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\cdot\sin(p-a)}{sina\cdot sinc}}\ (31)$$

$$sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\cdot\sin(p-b)}{sinb\cdot sina}}\ (32)$$

tapırıq. Əgər $cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$ düsturundan istifadə etsək:

$$cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{sinp\cdot\sin(p-a)}{sinb\cdot sinc}}\ (33)$$

$$cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{sinp\cdot\sin(p-a)}{sinc\cdot sina}}\ (34)$$

$$cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{sinp\cdot\sin(p-c)}{sinb\cdot sina}}\ (35)$$

alarıq.

(30), (31) və (32) düsturlarını uyğun olaraq (33), (34) və (35) düsturlarına tərəf-tərəfə bölsək:

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\cdot\sin(p-c)}{sinp\cdot\sin(p-a)}}\ (36)$$

$$tg\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\cdot\sin(p-a)}{sinp\cdot\sin(p-b)}}\ (37)$$

$$tg\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\cdot\sin(p-b)}{sinp\cdot\sin(p-c)}}\ (38)$$

alınır.

Təyin ediləcək bucaqların hər biri 180^0-dən kiçik olduğundan yarım bucaqlar da 90^0-dən kiçik olacaqdır. Buna görə də köklərin işarələri həmişə müsbət götürülür. Bundan başqa köklərin altındakı vuruqlar da həmişə müsbətdir:

$$a+b+c<360^0, p<180^0, a+b>c, a+b+c>2c, 2p>2c, p>c,$$
$$p-c>0$$

Bu qayda ilə $p-a>0, p-b>0$ olduğundan bu bucaqların sinusları da həmişə müsbət olacaqdır.

(36) və (37) düsturlarını tərəf-tərəfə vursaq:

$$tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-c)}{sinp}\ (39)$$

və bu qayda ilə də

$$tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}=\frac{\sin(p-a)}{sinp}\ (40)$$

$$tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)}{sinp}\ (41)$$

alarıq. (39), (40) və (41) düsturları sferik üçbucaqların həllində kontrol düsturlarıdır.

Burada aldığımız düsturlar sferik üçbucağın daxili bucağının tərəfləri vasitəsi ilə ifadələrdir.

İndi, əksinə, sferik üçbucağın tərəflərinin bu üçbucağın bucaqları vasitəsi ilə ifadəsini nəzərdən keçirək. (13) düsturundakı $cosa$-nın qiymətini $sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-cosa}{2}}$ düsturunda yerinə yazaq:

$$sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{sinB\cdot sinC-cosB\cdot cosC-cosA}{2sinB\cdot sinC}}=\sqrt{\frac{-|\cos(B+C)+cosA|}{2sinB\cdot sinC}}$$
$$=\sqrt{\frac{-2cos\frac{B+C+A}{2}-cos\frac{B+C-A}{2}}{2sinB\cdot sinC}}$$

alarıq və $\frac{B+C-A}{2}=P$ ilə işarə etsək $\frac{B+C-A}{2}=P-A,\frac{C+A-B}{2}=P-B,\frac{A+B-C}{2}=P-C$ nəticədə isə

$$sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-cosP\cdot\cos(P-A)}{sinB\cdot sinC}}\ (42)$$
$$sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-cosP\cdot\cos(P-B)}{sinA\cdot sinC}}\ (43)$$
$$sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-cosP\cdot\cos(P-C)}{sinB\cdot sinA}}\ (44)$$

alarıq. $cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+cosa}{2}}$ düsturundan istifadə etdikdə isə

$$cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cdot\cos(P-C)}{sinB\cdot sinC}}\ (45)$$
$$cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-C)\cdot\cos(p-A)}{sinA\cdot sinC}}\ (46)$$
$$cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cdot\cos(P-B)}{sinB\cdot sinA}}\ (47)$$

alarıq. (42), (43) və (44) düsturlarını uyğun olaraq (45), (46) və (47) düsturlarını tərəf-tərəfə bölsək

$$tg\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cdot\cos(P-C)}}\ (48)$$
$$tg\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos(P-B)}{\cos(P-C)\cdot\cos(P-A)}}\ (49)$$
$$tg\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos(P-C)}{\cos(P-A)\cdot\cos(P-B)}}\ (50)$$

alarıq. Bərabərliklərin sol tərəfləri həmişə müsbətdir, çünki sferik üçbucağın bir tərəfi həmişə 180^0-dən kiçik, yarısı isə 90^0-dən kiçik olmalıdır.

P həmişə 90^0-dən böyükdür, deməli, $\cos P$ həmişə mənfidir. Qalan bucaqlar da 90^0-dən kiçikdir. Doğrudan da, $B+C-A<180^0$, $B+C+A<180^0+2A$, $\frac{B+C-A}{2}<90^0+A, P<90^0+A, P-A<90^0$ və s.

Odur ki, bu düsturlar da yuxarıdakı düsturlar kimi üçbucağın elementlərinin bütün qiymətlərində doğrudur. Gördüyümüz kimi düsturların çıxarılışında hər dəfə ikinci və üçüncü düsturların yazılışı üç kəmiyyət arasında (istər A, B, C və istərsə a, b, c kəmiyyətləri arasında) dairə qanununun tətbiqi ilə başa çatdırılırdı. a-nı b ilə, b-ni c ilə, c-ni a ilə və s. əvəz etməklə, ikinci düsturu birincidən yenə bu qaydada əvəz etməklə üçüncü düsturu ikincidən alırıq. Bu qayda ilə bir ifadədən ikinci ifadəyə keçməyə, dairə qanunu ilə keçmə deyilir.

Sferik üçbucağın daxili bucaqların cəmi 180^0-dən artıq olur. $A + B + C - 180^0 = E$, yəni üçbucaqda bucağın 180^0-dən artıq olan qalıq qiymətinə üçbucağın ekssesi deyilir. (Eksses-latın sözü olmaqla artıqlıq və ya qalıq deməkdir).

Sferik üçbucağın elementləri onun qalan elementləri də ekssesindən asılı olaraq da təyin edilir. Bu zaman $P = \frac{A+B+C}{2} = 90^0 + \frac{E}{2}; P - A = 90^0 - \left(A - \frac{E}{2}\right)$, $P - B = 90^0 - \left(B - \frac{E}{2}\right)$, $P - C = 90^0 - \left(C - \frac{E}{2}\right)$ olur.

Bu qiymətləri yuxarıdakı düsturlarda yerinə yazmaqla sferik üçbucaq üçün ikinci bir qrup düsturlar almaq mümkündür.

Problemin aktuallığı: Orta ümumtəhsil məktəblərinin riyaziyyat təlimində tətbiq edilən fənn kurikulumunu nəzərə alaraq üçbucaqların həllində sferik triqonometriyadan istifadə edilməsi tədris materialının şagirdlər tərəfindən dərindən dərk edilməsinə müsbət təsir göstərir.

Problemin elmi yeniliyi: Riyaziyyat təlimində müasir təlim metodlardan istifadə edərək həndəsə elementlərinin öyrədilməsi şagirdlərin elmi-praktik vərdişlərinin yüksəldilməsinə, onların gələcək təhsillərini uğurla həyata keçirməsinə və yaxud mənimsəmənin optimallığını təmin etməyə müsbət təsir edir.

Problemin praktik əhəmiyyəti: Məqalə elementar riyaziyyat və riyaziyyatın tədrisi metodikasından mühazirə deyən və seminar məşğələləri aparan ali məktəb və orta ümumtəhsil məktəblərində çalışan müəllimlər, o cümlədən tədqiqatçılar üçün faydalıdır.

Ədəbiyyat:

1. Adıgözəlov A.S., Əliyeva T.M., Quliyev A.İ., Rzayev M.T. Elementar həndəsə. -Bakı, 2018.
2. Quliyev Ə.A., Quliyev Y.A, Riyaziyyat: Abituriyentlər üçün. -Bakı: Təbib, -2000.
3. Quliyev Ə.A., Quliyev Y.A. Planimetriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı. -Bakı, 2008.
4. Mirzəyev S.S., Sadıqov Ş.M., Həndəsə - 8, Məsələ və tapşırıqlar həlli ilə. -Bakı: Çaşıoğlu, -2005.
5. Əliyev İ.F. Elementar həndəsə. -Bakı, 2009.
6. Əsgərov K.S., Adıgözəlov A.S., Məmmədov A.A. Həndəsədən məsələ həlli praktikumu: Dərs vəsaiti).- Bakı, V.İ. Lenin adına APİ-nin nəşri, -1986. - 117 s.
7. Əsgərov K.S., Axundov S.S. Elementar həndəsə. Bakı: APİ-nin nəşri, 1974. – 211 s.
8. Адамар Ж. Элементарная геометия. Ч.II. Стерометрия. -М., 1958, -787 с.
9. Аргунов Б.Ф., Балк М.Б. Элементарная геометия. -М., 1966.
10. Базылев В.Т. и.др. Геометрия, ч. I. -М., Просвешение, -1986, ч. II, 1987.

E-mail: mayilovaaysel981@gmail.ru

Redaksiyaya daxil olub: 28.11.2024