

UOT 372.851

Ziba Novruz qızı Rəhimova

*Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində
Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimi
<https://aorcid.org/0009-0009-1933-1831>
E-mail: rehimovaziba40@gmail.com*

Dilbər Məhəmməd qızı Qasımzadə

*Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimi
<https://orcid.org/0009-0001-8801-1120>
E-mail: dilberqasimzade@mail.ru
[https://doi.org/10.69682/arti.2025.92\(2\).146-151](https://doi.org/10.69682/arti.2025.92(2).146-151)*

FUNKSIYA VƏ İFADƏLƏRİN ƏN BÖYÜK VƏ YA ƏN KİÇİK QIYMƏTLƏRİNİN HESABLANMASI YOLLARININ ARAŞDIRILMASI

Зиба Новруз гызы Рахимова

*преподаватель Сумгаитского Государственного Технического Колледжа при Сумгаитском
Государственном Университете*

Дилбер Мухаммед гызы Гасымзаде

*преподаватель Сумгаитского Государственного Технического Колледжа при Сумгаитском
Государственном Университете*

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАИБОЛЬШИХ ИЛИ НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ И ВЫРАЖЕНИЙ

Ziba Novruz Rahimova

lecturer of Sumgait State Technical College under Sumgait State University

Dilbar Mahammad Gasimzadeh

lecturer of Sumgait State Technical College under Sumgait State University

EXPLORING WAYS TO CALCULATE THE LARGEST OR SMALLEST VALUES OF FUNCTIONS AND EXPRESSIONS

Xülasə. Məqalədə bəzi funksiyaların və ifadələrin ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılması məsələsinə baxılmışdır. Həmçinin max. və min. məsələlərin həllinin yeni metodları araşdırılmışdır. Tətbiq olunan metodlar həm orta məktəb, həm də ali məktəb riyaziyyatında istifadəsi baxımından şagirdlərin, tələbələrin və müəllimlərin bu tip problemlərdə istifadəsi üçün faydalı olacağı məqsədi daşıyır.

Açar sözlər: Parametr, funksiya, maksimum, minimum, məsafə, koordinat sistemi, çevirmə, analitik, kvadrat kök, dəyişən, parametr.

Аннотация. В статье рассматривается задача нахождения наибольшего и наименьшего значений некоторых функций и выражений. Также обсуждаются вопросы максимальности и минимальности. Были исследованы новые методы решения проблем. Используемые методы полезны как для преподавания математики в средней школе, так и в высших учебных заведениях, а также для студентов и преподавателей.

Ключевые слова: параметр, функция, максимум, минимум, расстояние, система координат, преобразование, аналитический, квадратный корень, переменная, параметр

Abstract. The article deals with the problem of finding the largest and smallest values of some functions and expressions. Also, new methods for solving max. and min. problems are investigated. The

applied methods are intended to be useful for pupils, students and teachers in this type of problems, both in terms of their use in secondary school and higher education mathematics.

Keywords. *parameter, function, maximum, minimum, distance, coordinate system, transformation, analytical, square root, variable, param*

Riyaziyyatın tətbiqi sahələri geniş və çox şaxəlidir. Orta məktəb riyaziyyat kursu baza – bünövrə rolunu oynasa da, daha çətin, tətbiqi məsələlərin həlli də bəzən yetərli olmur və ya daha fərqli metodların öyrənilməsinin vacib olduğu məlum olur. Həmişə funksiyaların və ədədi – hərfi, parametrdən asılı ifadələrin qiymətlər çoxluğunun, ən böyük və ya ən kiçik qiymətlərinin tapılması məsələləri gündəmdə olub və indi də çoxlarının maraq dairəsində qalmaqdadır. Digər tərəfdən praktik olaraq bu tip məsələlərin həllinə həmişə ehtiyac olduğundan, yeni yanaşmalar və metodlara da ehtiyac vardır.

Bu baxımdan məqalədə bir neçə maraqlı və yeni metodlarla funksiyanın maksimum və minimum qiymətlərinin tapılmasına baxılacaq. Təbii ki, ən ümumi olan üsul funksiyanın araşdırılması, törəməsinin tapılması və bu törəmə funksiyanın özünün araşdırılmasıdır. Ancaq elə hallar olur ki, törəmənin hesablanması zamanı alınan funksiyanın özü daha mürəkkəb olur, bu səbəbdən analitik üsullar, yəni funksiyanın analitik düsturunun sadələşdirilməsi və ya onun üzərində aparılan çevrilmələr vasitəsi ilə daha asan və tez axtarılan nəticəni əldə etmək olur. Məqalədə də bu üsula üstünlük veriləcək.

İlk öncə həndəsi yolla, həndəsənin sadə məsələlərindən iki nöqtə arasındakı məsafə düsturunun tətbiqi ilə! verilmiş funksiyanın ən kiçik qiymətini və ya qiymətlər çoxluğunun araşdırılması kimi maraqlı bir məsələnin həllinə baxaq:

Misal 1. $y = \sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ funksiyanın qiymətlər çoxluğunun tapılması tələb olunur.

Məsələnin həllinin araşdırılması:

Məlumdur ki, əgər ümumi yolu, törəmənin köməyi ilə məlum alqoritm üzrə araşdırsaq, I tərtib törəmədən alınan funksiya kifayət qədər mürəkkəb olacaq və məlum çətinliklərlə üzləşəcəyik. Bax bu yerdə fərqli metodlar köməyə gəlir. Bu məsələnin həllinə həndəsi metodu tətbiq edəcəyik. Və bu yerdə qeyd edək ki, metodik baxımdan heç də ağla gəlməz bir yol seçib tələb olunan suala cavab tapacağıq:

Bunun üçün funksiyanın verilmiş analitik şəklində sadə çevrilmələr aparaq, daha doğrusu kvadrat kökaltında tam kvadrata ayıraraq, məsafə düsturunu tətbiq etməyə çalışaq:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} &= \sqrt{(x^2 + 4)^2 + 4} + \sqrt{(x - 3)^2 + 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + 4)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (1 - 0)^2}\end{aligned}$$

məqsəd $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$, yəni

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ – nöqtələri arasındakı məsafə düsturunu tətbiq etməkdir.

$$y = \sqrt{(x + 4)^2 + (0 - 2)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (0 + 1)^2}$$

$$\text{və } AB = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

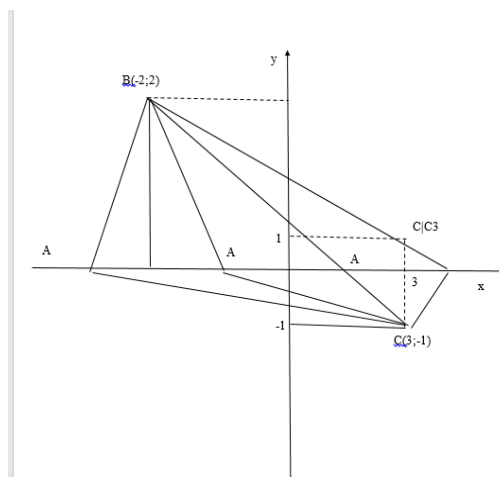
düsturunu müqayisə edərək belə bir həndəsi nəticəyə gəlmək olar:

$A(x_1; y_1) \sim A(x; 0)$ və $B(x_2; y_2) \sim B(-2; +2)$ qəbul edərək,

$\sqrt{(x + 4)^2 + (0 + 2)^2}$ - ifadəsini $A(x; 0)$ və $B(-2; 2)$ nöqtələri arasındakı məsafə kimi,

$A(x; 0)$ və $C(3; -1)$ qəbul edərək, $\sqrt{(x - 3)^2 + (0 + 1)^2}$ ifadəsini isə $A(x; 0)$ və $C(3; -1)$ nöqtələri arasındakı məsafə kimi qəbul edə bilərik.

Təyin etdiyimiz nöqtələri koordinat sistemində göstərək:



$B(-2; 2)$ və $C(3; -1)$ nöqtələri məlum olduğu üçün onları qeyd edib $A(x; 0)$ nöqtəsini OX oxu üzərində yerləşən, ixtiyari nöqtə kimi götürə bilərik. A nöqtəsinin müxtəlif qiymətləri içərisində elə biri var ki, $AB + AC$ məsafəsi ən kiçik olsun! Bu nöqtə BC – düz xətti üzərində olan $A(x; 0)$ nöqtəsidir! Çünki $A(x; 0)$ nöqtəsi ilə B və C nöqtələrini birləşdirdikdə alınan ABC üçbucağı üçün $AB + AC > BC$ bərabərsizliyi həmişə ödənəcək. Yalnız elə bir absis olacaq ki, həmin $A(x_0; 0)$ nöqtəsində

$AC + AB = BC$ olacaq!

Deməli, verilmiş $y = \sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ funksiyası üçün minimum qiyməti almış oluruq, bu BC məsafəsinin bərabər olduğu məsafədir və bu zaman $A(x; 0)$ nöqtəsinin koordinatının tapılmasına belə ehtiyac qalmır.

$$\min_{D(y)} y = |BC| = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

$$\min y = BC = \sqrt{34}$$

Y funksiyası artan funksiya olduğu üçün ən böyük qiyməti ∞ - a bərabərdir. Deməli y funksiyasının qiymətlər çoxluğu $E(y) = [\sqrt{34}; +\infty)$ olar.

Funksiyanın maksimum, minimum qiymətinin və ya qiymətlər çoxluğunun tapılması kimi çox mühüm bir məsələnin həlli bir çox hallarda funksiyanın analitik şəkildən və deməli həm də onun təyin olunduğu oblastın hansı çoxluq olmasından da asılı olur. Bu səbəbdən də bəzən qiymətlər çoxluğunun və ya funksiyanın maksimum və ya minimum qiymətinin tapılmasında tərs məsələ metodu – yanaşmasından istifadə etmək sərfəli və bəzi hallarda da yeganə çıxış yolu olur.

Bu prinsipi – metodu tətbiq etməklə aşağıdakı funksiyanı araşdıraraq:

Məsələ 2. $y = x - \sqrt{x^2 + x - 2}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

Məsələnin həllinin araşdırılması: məsələyə tərs məsələ kimi baxaq, yəni fərz edək ki, elə bir A ədədi var ki, (və yaxud parametr) $x - \sqrt{x^2 + x - 2} = A$ (1) tənliyinin həlli var və bu tənliyin həllinin hansı x -lər üçün mümkün olduğunu araşdıraraq:

Beləliklə verilmiş funksiya üçün $E(y)$ - qiymətlər çoxluğunun tapılması məsələsi (1) parametrdən tənliyin həllinin araşdırılmasına gətirilir. (1) tənliyini həll edək:

$$x - \sqrt{x^2 + x - 2} = A \Rightarrow \sqrt{x^2 + x - 2} = x - A \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + x - 2 &= (x - A)^2 \\ x - A &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + x - 2 &= x^2 - 2Ax + A^2 \\ x - A &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x - 2 &= A^2 - 2Ax \\ x - A &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 2Ax &= A^2 - 2 \\ x - A &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x(1 + 2A) &= A^2 - 2 \\ x - A &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= \frac{A^2 + 2}{1 + 2A} \\ x &\geq A \end{aligned} \right\}$$

deməli, funksiyanın qiymətlər çoxluğunun axtardığı x - dəyişəni üçün parametrdən asılı olan $\frac{A^2+2}{2A+1} \geq A$ (2) bərabərsizliyini alırıq. Nəticənin alınması üçün (2) bərabərsizliyinin həllini tapmaq kifayət edəcəkdir.

(1) bərabərsizliyinin hər tərəfini $(2A+1)^2 \geq 0$ müsbət ədədinə vuraq:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A^2+2}{2A+1} \cdot (2A+1)^2 &\geq A \cdot (2A+1)^2 \\ 2A+1 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (2A+1) \cdot (A^2+2) &\geq A \cdot (2A+1)^2 \\ 2A+1 &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

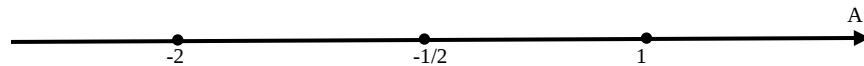
$$\Rightarrow (2A+1) \cdot (A^2+2) - A(2A+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2A+1)(A^2+2-2A^2-A) \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} (2A+1)(-A^2-A+2) &\geq 0 \\ 2A+1 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (2A+1)(A^2+A-2) &\leq 0 \\ 2A+1 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

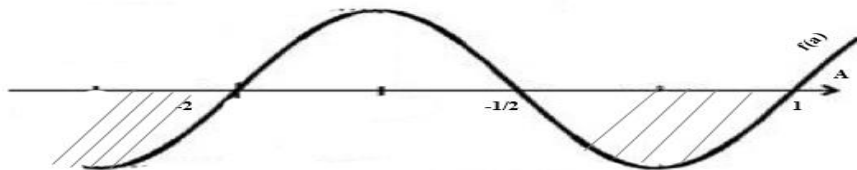
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (2A+1)(A-1)(A+2) &\leq 0 \\ 2A+1 &\neq 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

Sonuncu bərabərsizliyin həllini ədəd oxunda göstərək:



Sonuncu (4) bərabərsizliyinin sol tərəfi kubik funksiya və həmin funksiyanın sıfırları: $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$ və $x_3 = 1$ nöqtələridir. A - ədəd oxunu beş intervala bölən bu üç nöqtə üçün hər bir intervalda alınmış kubik funksiyanın işarəsini müəyyən etsək, bu o demək olardı ki, biz faktiki olaraq:

$(2A+1)(A-1)(A+2)$ - ifadəsinin A -dan asılı funksiyanın sxematik qrafikini çəkmiş oluruq ki, bu da aşağıdakı kimi olacaq:



(4) bərabərsizliyində ≤ 0 qiymətlər tələb olunduğundan, sxematik qrafikdə ştrixlənmiş hissələr bərabərsizliyin həlli və deməli bizim məsələ üçün işə verilmiş funksiyanın $E(y)$ - qiymətlər çoxluğu olacaq.

Yəni: $E(y) = (-\infty; -2] \cup (-\frac{1}{2}; 1]$. Cavab müsbətdir.

İndi isə ikinci məsələ həllinə oxşar metodla, ancaq daha mürəkkəb funksiyanın qiymətlər çoxluğunun tapılmasına baxaq.

Məsələ 3. $y = \log_{16x-12-4x^2} \left(\frac{|x+1|+|x-5|}{3} \right)$ funksiyanın $E(y)$ - qiymətlər çoxluğunu tapaq.

Həllin araşdırılması: funksiyanın analitik düsturundan görüldüyü kimi kifayət qədər mürəkkəb funksiya. Yəni həm əsası, həm də loqarifmdaxili ifadə x -dən asılıdır, özü də mürəkkəb funksiya kimi. Belə olduqda təbii ki, ümumi - törəmə yolu ilə araşdırma müsbət nəticə verməyəcək. O səbəbdən xüsusi metod seçək. Hesab edək ki, elə bir B parametri - ədədi var ki,

$$y = \log_{16x-12-4x^2} \left(\frac{|x+1| + |x-5|}{3} \right) = B (*)$$

tənliyinin həlli var və bu parametrenin mümkün qiymətlərində (*) tənliyinin həllini tapmağa çalışaq.

Əvvəlki məsələdən fərq ondadır ki, burada funksiyanın $D(y)$ – təyin oblastının tapılması mütləqdir. Ona görə də əvvəlcə təyin oblastını tapaq.

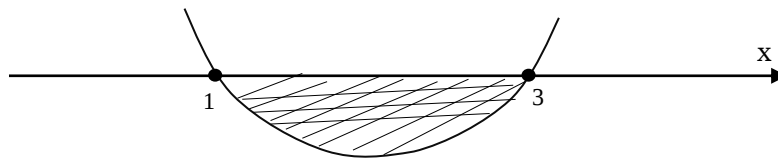
(*) – dan $\Rightarrow$ ki,

$$\begin{aligned} B &= \log_{16x-12-4x^2} \left(\frac{|x+1| + |x-5|}{3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} (16x-12-4x^2)^B &= \frac{|x+1| + |x-5|}{3} \\ 16x-12-4x^2 &> 0, \pm 1 \end{aligned} \right\} \text{şərti ödənməlidir.} \end{aligned}$$

Loqarifmanın əsası olan $16x-12-4x^2$ üçhədlisi müsbət və vahidə bərabər olmayan ədəd olmalıdır, buna görə də

$$\begin{aligned} 16x-12-4x^2 > 0 &\Rightarrow 4x^2-16x+12 < 0 \Rightarrow x^2-4x+3 < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-1)(x-3) < 0 \end{aligned}$$

Ədəd oxunda təsvir etsək



$x \in (1; 3)$ intervalından olan x dəyişənləri üçün məsələnin həllinə baxılmalıdır. Bu şərt daxilində, yəni, $1 < x < 3$ aralığında loqarifmaaltı ifadəni qiymətləndirək:

1) $|x+1|$ - modulu $1 < x < 3$ olan x -lər üçün həmişə müsbət olacaq və $1 < x < 3 \Rightarrow 2 < x+1 < 4$ – şərti ödəyər.

2) $|x-5|$ – modulu isə $x \in (1; 3)$ üçün mənfi olacaq, yəni: $1 < x < 3 \Rightarrow -4 < x-5 < -2$ olacaq.

Beləliklə alırıq ki,

$$|x+1| + |x-5| = x+1 - (x-5) = 4 \text{ olar.}$$

Deməli:

$B = \log_{16x-12-4x^2} 2$ – tənliyini alırıq. Bu tənliyi həll edərək, məsələnin həllini alırıq:

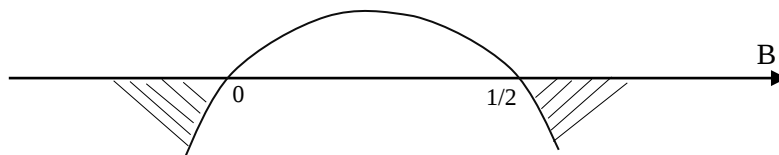
$$\begin{aligned} \log_{16x-12-4x^2} 2 &= \log_{4(4x-3-x^2)} 2 = 2 \text{ əsasına keçərək} = \frac{\log_2 2}{\log_2 4(4x-3-x^2)} = \\ \frac{1}{\log_2 4 + \log_2 (4x-3-x^2)} &= \frac{1}{\log_2 (4x-3-x^2) + 2} \Rightarrow B(\log_2 4x-3-x^2+2) = 1 \text{ alırıq. Buradan} \end{aligned}$$

$$\log_2 (4x-3-x^2) + 2 = \frac{1}{B} \Rightarrow \log_2 (4x-3-x^2) = \frac{1}{B} - 2 = \frac{1-2B}{B} =$$

$$= \log_2 2^{\frac{1-2B}{B}} \Rightarrow 4x-3-x^2 = 2^{\frac{1-2B}{B}} \Rightarrow x^2-4x+4-1+2^{\frac{1-2B}{B}} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-2B}{B} &\leq 0 \Rightarrow B(1-2B) \leq 0 \\ B &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

Buradan



$B(1-2B)$ üçhədlisinin ≤ 0 şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğu sxemdə ştrixlənmiş, yəni: $(-\infty; 0] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$ çoxluğudur. Deməli bu çoxluq elə bizim məsələnin həllidir, yəni verilmiş funksiyanın qiymətlər çoxluğudur.

$E(y) = (-\infty; 0] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$. Cavab müsbətdir.

Problemin elmi yeniliyi. Birdəyişənli funksiyaların və ya ifadələrin ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin hesablanmasının həndəsənin tətbiqi ilə yeni üsulları verilmişdir.

Bu üsul və metodiki yanaşmalar müxtəlif məsələ və misalların tətbiqi ilə öz təsdiqini tapmışdır.

Problemin praktik əhəmiyyəti. Məqalədə müxtəlif funksiya və ya ifadələrin maksimum və minimum qiymətlərinin tapılması kimi praktik əhəmiyyəti olan məsələlər həll edilmişdir. Bu tip məsələlər riyaziyyatda həmişə maraq doğuran problemlər sırasında olduğundan məqalədə tətbiq olunan metodların praktik əhəmiyyəti çox mühümdür.

Problemin aktuallığı. Məqalədə araşdırılan, praktik əhəmiyyətə vacib olan məsələlər və onların yeni üsullarla həllindəki yeni yanaşmalar həm orta məktəb müəllim və şagirdləri, həm də ali məktəb tələbə və magistrleri üçün xüsusi əhəmiyyət kəsb etdiyindən aktualdır.

Ədəbiyyat

1. Туманов, С.И. Поиски решения задач. / С.И. Туманов. -Москва: Просвещение -1969. -267 с.
2. Ивлев, Б.М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Учебн. пособие для 10-11 кл. средн. Школы. / Б.М. Ивлев, Шварцбург С.И. - Просвещение, -1990. -350 с.
3. İbrahimov, Ə.Y. Çətinlik dərəcəsi yüksək olan riyaziyyat məsələlərinin həlli üzrə praktikum. / Ə.Y. İbrahimov, A.Y. Kreymer, S.N. Sadıqov -Bakı, -1975. -287 s.
4. Yaqubov, M.H. Riyaziyyat. Məsələ və misallar. / M.H. Yaqubov. -Bakı: Çarşıoğlu, -2009. -310 s.

Redaksiyaya daxil olub: 05.03.2025