RİYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI
METHODOLOGY OF TEACHING MATHEMATICS
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

UOT 372.851
UOT 372.851

Fəxrəddin Feyzullah oğlu Əliyev
Sumqayıt Dövlət Universitetinin
Riyaziyyat və informatikanın tədrisi texnologiyası kafedrasının dosenti
https://orcid.org/0000-0002-2039-2334
E-mail: af_64@mail.ru
https://doi.org/10.69682/arti.2025.92(6).191-195

FUNKSİYANIN TÖRƏMƏSİNİN HESABLANMASI QAYDASINDA XÜSUSİ HALLAR

Fakhraddin Feyzullah Aliyev
associate professor of the department of Technology for teaching mathematics and informatics at the Sumgait State University

SPECIAL CASES IN CALCULATING THE DERIVATIVE OF A FUNCTION

Фахраддин Фейзулла оглы Алиев
доцент кафедры Технологии преподавания математики и информатики Сумгаитского Государственного Университета

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Xülasə. Funksiyanın törəməsi anlayışının geniş tətbiqlərinin olduğu məlumdur. Ekstremum məsələləri, qeyri – standart sahələrin, əyrinin uzunluğunun , ixtiyarı fəza fiqurunun həcminin hesablanması və sair. Məqalədə törəmənin hesablanmasınn ənənəvi düsturunun deyil, xüsusi seçilmiş funksiyalar üçün ilk baxışda düzgün olmayan hasil və nisbətin törəmə düsturlarının çıxarılışı verilmişdir. Bu kimi yanaşmalar riyaziyyat müəllimlərində və riyaziyyat sevərlərdə fənnə çox ciddi təsir edən stimul yaradır. Bu baxımdan riyaziyyatın dərindən öyrənilməsində çox böyük əhəmiyyət kəsb edəcəyi gözlənilləndir.

Açar sözlər: *funksiyanın törəməsi, diferensial tənik, natural ədədlər ardıcıllığı, qeyri-müəyyənlik, sonsuz cəm, hasil, nisbət, hesablama, hasilin törəməsi, nisbətin törəməsi, riyazi araşdırma*

Abstract. It is known that the concept of the derivative of a function has wide applications.

Extremum problems, calculation of non-standard areas, the length of a curve, the volume of an arbitrary spatial figure, etc. The article does not give the traditional formula for calculating the derivative, but rather the derivation of derivative formulas for products and ratios that are not correct at first glance for specially selected functions. Such approaches create a very serious stimulus for mathematics teachers and mathematics lovers to the subject. From this point of view, it is expected to be of great importance in the in-depth study of mathematics.

Key words: *derivative of a function, differential equation, sequence of natural numbers, uncertainty, infinite sum, product, ratio, calculation, derivative of product, derivative of ratio, mathematical investigation*

Аннотация. Известно, что понятие производной функции имеет широкое применение. Задачи на экстремум, вычисление нестандартных площадей, длины кривой, объёма произвольной пространственной фигуры и т. д. В статье не приводится традиционная формула для вычисления производной, а выводятся формулы производных для произведений и отношений, которые на первый взгляд некорректны для специально подобранных функций. Такие подходы создают серьёзный стимул для учителей математики и любителей математики к предмету. С этой точки зрения, ожидается, что она будет иметь большое значение для углубленного изучения математики.

Ключевые слова: *производная функции, дифференциальное уравнение, последовательность натуральных чисел, неопределенность, бесконечная сумма, произведение, отношение, вычисление, производная произведения, производная отношения, математическое исследование*

Aydındır ki, riyaziyyat dəqiq elmlərin sıralamasında birinci yerdə gəlir. Belə ki, burada hər hansı bir anlayışın tərifi, xassələri, hesablamalar, düsturlar və s. hamısı mükəmməl məntiqə əsaslanır. Bununla belə riyaziyyatda da özünəməxsus kənara çıxmalar, qeyri-müəyyənliklər, məlum hesablama düsturlarından kənar xüsusi hallar, yəni ümumi düstura sanki tabe olmayan xüsusi hallar olur. Bu tip məsələlərə, məsələn sonsuz sayda ədədlərin hesablanması zamanı, məsələn 1-dən başlayaraq, sonsuz sayda natural ədədlərin cəminin sonsuz böyük yox, sonlu ədədə bərabər olmasını göstərən riyazi hesablamalar var: izah üçün bunu göstərək:

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots =$$
$$= 1 + (2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7) + (8 + 9 + 10) + (11 + 12 + 13) + \cdots =$$
$$= 1 + 9 + 18 + 27 + 34 + 45 + \cdots = 1 + 9\underbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots)}_{N} = N$$

olarsa, $1 + 9N = N$ almış olarıq ki, burada 1-dən ∞-a qədər sayda natural ədədin cəminin

$$1 + 9N = N, N = -\frac{1}{8}$$

olması görünür. Bu qeyri-dəqiqliyin səbəbləri sonsuz sayda toplananlarla bağlıdır.

Bununla yanaşı, məqalədə göstərəcəyimiz qeyri-dəqiqliklə bağlı, daha doğrusu funksiyanın törəmə qaydalarının "pozulduğu" hallara baxacağıq.

İki funksiyanın cəminin və fərqinin törəməsinin

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

kimi hesablandığı məlumdur. Funksiyanın hasilinin və nisbətinin törəməsi isə törəmənin tərifindən alınan və bir qədər daha mürəkkəb

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

düsturları ilə hesablandığını bilirik.

Riyaziyyat kursunun törəmə ilə bağlı dərslərində şagirdlər və ya tələbələr səhvən iki funksiyanın hasilinin və nisbətinin törəməsi necə hesablanır? –sualına bəzən səhv və tələsik olaraq, bəzi xüsusi hallara əsaslanaraq

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

və

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

kimi anlayırlar.

Sual olunur, bəs səhv kimi qeyd etdiyimiz bu iki düstur həqiqətənmi səhvdir?!, yoxsa xüsusi hallarda, yəni $f(x)$ və $g\ (x)$ funksiyalarının bəzi xüsusi qiymətlərində bu düsturlar doğru olur.

Məqalədə yuxarıda iki funksiyanın hasilinin və nisbətinin törəməsi ilə bağlı iki halı araşdıracağıq.

Əvvəlcə $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$ olduğunu sübut edək (xüsusi seçilmiş $f(x)$ və $g(x)$ üçün). Bu qeyri-müəyyən, qeyri dəqiq düsturun doğruluğunu isbat üçün sol tərəfin törəməsini təsdiq edilmiş məlum düsturla, sağ tərəfini isə isbatı tələb edilən kimi yazaq:

$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$ (1)

Sadəlik üçün x-dəyişənini nəzərə almadan yazsaq, aşağıdakı kimi dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik almış oluruq.

$f' \cdot g + f \cdot g' = f' \cdot g'$,

$$f'g - f'g' = -f \cdot g',$$

$f'(g - g') = -f \cdot g'$,

Bərabərliyin hər tərəfinin $f(g - g')$ hasilinə bölsək, alarıq:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{g'}{g - g'}$$

Hər tərəfi x dəyişəninə görə inteqrallasaq

$$\int \frac{f'}{f}dx = \int \left(-\frac{g'}{g-g'}\right)dx$$
$$lnf = -\int \frac{g'}{g-g'}dx + C,$$

$f(x) = Ce^{-\int \frac{g'}{g-g'}dx} = Ce^{-\int \frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}dx}$ (2)

almış olarıq. Məlumdur ki,

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left|\begin{matrix} f(x)=u, \\ f'(x)dx = du\end{matrix}\right| = \int \frac{du}{u} = lnu = lnf(x).$

İndi isə $g(x)$ funksiyasını seçək. $g(x) = e^{ax}$ kimi qəbul etsək, $g'(x) = ae^{ax}$ (3) olar. (3)-ü (2)-də nəzərə alsaq,

$$f(x) = Ce^{-\int \frac{g'}{g-g'}dx} = Ce^{-\int \frac{ae^{ax}}{e^{ax}-ae^{ax}}dx} = Ce^{\int \frac{ae^{ax}}{e^{ax}(\square-1)}dx} = Ce^{\int \frac{a}{a-1}dx} = C \cdot e^{\frac{a}{a-1}x},$$
$$f(x) = C \cdot e^{\frac{a}{a-1}x} \ (a \neq 1)$$

olar.

İndi göstərək ki, $g(x) = e^{ax}$ $(a \neq 1)$ olduqda, $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$ bərabərliyi doğrudur. Bunun üçün hasilin törəməsi düsturunda bunları nəzərə alsaq

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \left(e^{\frac{a}{a-1}x}\right)' \cdot e^{ax} + e^{\frac{a}{a-1}x} \cdot (e^{ax})' =$$
$$= \frac{a}{a-1}e^{\frac{a}{a-1}x} \cdot e^{ax} + ae^{ax} \cdot e^{\frac{a}{a-1}x} = e^{\frac{a}{a-1}x} \cdot e^{ax}\left(\frac{a}{a-1} + a\right) =$$

$= e^{\frac{a}{a-1}x} \cdot e^{ax} \cdot \frac{a+a^2-a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}e^{\frac{a}{a-1}x} \cdot e^{ax}$. (4)

$f'(x) \cdot g'(x) = \left(e^{\frac{a}{a-1}x}\right)' \cdot (\,e^{ax})' = \frac{a}{a-1}e^{\frac{a}{a-1}x} \cdot a\,e^{ax} = \frac{a^2}{a-1}e^{\frac{a}{a-1}x} \cdot e^{ax}$ (5)

Beləliklə, (4) və (5) bərabərliklərindən alırıq ki, $g(x) = e^{ax}$ $(a \neq 1)$ olduqda

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

bərabərliyi ödənilir.

Fərz edək ki, $g(x) = x^n$. $g'(x) = nx^{n-1}$ olduğundan (2) dusturundan alarıq ki,

$$f(x) = e^{-\int \frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}dx} = e^{-\int \frac{nx^{n-1}}{x^n - nx^{n-1}}dx} = e^{\int \frac{n}{n-x}dx} = e^{-n\int \frac{d(n-x)}{n-x}} = e^{-nln(n-x)} = \frac{1}{(n-x)^n},$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$$
$$= \left(\frac{1}{(n-x)^n}\right)' \cdot x^n + \frac{1}{(n-x)^n} \cdot (x^n)' = n \cdot \frac{1}{(n-x)^{n+1}} \cdot x^n + \frac{1}{(n-x)^n} \cdot nx^{n-1} =$$

$= \frac{n \cdot x^n + nx^{n-1}(n-x)}{(n-x)^{n+1}} = \frac{n^2x^{n-1}.}{(n-x)^{n+1}};$

$f'(x) \cdot g'(x) = \left(\frac{1}{(n-x)^n}\right)' \cdot (x^n)' = \frac{n \cdot nx^{n-1}}{(n-x)^{n+1}} = \frac{n^2x^{n-1}.}{(n-x)^{n+1}}.$

Beləliklə, göstərdik ki, $g(x) = x^n$ olduqda

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

bərabərliyi ödənilir.

İndi isə iki funksiyanın nisbətinin törəməsinin onların törəmələri nisbətinə bərabər olduğu xüsusi halı araşdıraq.

Məlumdur ki, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (6) düsturu bütün funksiyalar üçün doğrudur.

Fərz edək ki, elə iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları var ki, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (7) bərabərliyini ödəyirlər. Onda (6) və (7) bərabərliklərinə görə

$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (8)

olar. Sadəlik üçün (8)-i $\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} = \frac{f'}{g'}$ (9) şəklində yazaq. Bu tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən tənlik olduğundan (9) – u sadə çevirmələrlə aşağıdakı şəklə gətirək:

$\frac{f'}{f} = \frac{(g')^2}{g' \cdot g - g^2}$. (10)

(10) tənliyini x dəyişəninə görə inteqrallayaq:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{(g')^2}{\square' \cdot g - g^2} dx.$$

$\int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int \frac{(g')^2}{g' \cdot g - g^2} dx$, $\ln(f(x) = \int \frac{(g')^2}{g' \cdot g - g^2} dx + C, f(x) = Ce^{\int \frac{(g')^2}{g' \cdot g - g^2} dx}$. (11)

İndi isə $g(x)$ funksiyasını seçək. Məsələn, $g(x) = x^n$ şəklində götürək. Onda $g'(x) = nx^{n-1}$ olar.

Yazılışın sadəliyi üçün əvvəlcə $\int \frac{(g')^2}{g' \cdot g - g^2} dx$ inteqralına baxaq.

$\int \frac{(g')^2}{g' \cdot g - g^2} dx = \int \frac{n^2 \cdot x^{2n-2}}{n \cdot x^{2n-1} - x^{2n}} dx = \int \frac{n^2}{nx - x^2} dx.$

Sonuncu inteqralaltı ifadə rasional ifadə olduğundan onu

$$\frac{n^2}{nx - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{n - x}$$

Sadə kəsrlərin cəmi şəklində yazıb, buradan $A = B = n$ taparıq. Bu qiymətləri $\int \frac{n^2}{nx - x^2} dx$ nəzərə alsaq, onda

$$f(x) = e^{\int \frac{(g')^2}{g' \cdot g - g^2} dx} = e^{\int \left(\frac{n}{x} + \frac{n}{n-x}\right) dx} = e^{lnx^n - ln(n-x)^n} = e^{ln\left(\frac{x}{n-x}\right)^n} = \left(\frac{x}{n - x}\right)^n, f(x) = \left(\frac{x}{n - x}\right)^n.$$

Beləliklə, seçilən $g(x) = x^n$ funksiyasına görə elə $f(x) = \left(\frac{x}{n-x}\right)^n$ funksiyasını təyin etdik ki, bu funksiyalar üçün $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ bərabərliyi odənir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $g(x) = x^n$ və $f(x) = \left(\frac{x}{n-x}\right)^n$ funksiyaları üçün, məsələn, $n = 2$ olarsa, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ bərabərliyi odənir. Doğrudan da bu halda,

$g(x) = x^2$ və $f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^2$ şəklində olur. Onda

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{(2-x)^2}\right)' = ((2 - x)^{-2})' = \frac{2}{(2-x)^3}$; (12)

$\frac{f'}{g'} = \frac{\left[\left(\frac{x}{2-x}\right)^2\right]'}{(x^2)'} = \frac{2x(4-4x+x^2)+x^2(4-2x)}{2x(2-x)^4} = \frac{4-2x}{(2-x)^4} = \frac{2}{(2-x)^3}$. (13)

(12) və (13) bərabərliklərinin sağ tərəflərinin bərabərliyindən sol tərəflərinin də $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ bərabərliyi alınır. Eyni qaydada göstərmək olar ki, istənilən n üçün $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ bərabərliyi ödənir.

$g(x) = x^n$ və $f(x) = \left(\frac{x}{n-x}\right)^n$ funksiyaları üçün, məsələn, $n = 3$,

$n = 4, və\ sair\ hallar$ üçün $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ bərabərliyinin doğruluğunun yoxlanılmasını dinləyicilərə həvalə edirik.

Problemin aktuallığı. Baxılan problemin tədqiqinin nəticələrindən praktikada, müxtəlif məsələlərin intensivləşdiriməsində baxılan üsullardan istifadə etməklə şagirdlərin təfəkkürünün inkişaf etdirilməsində istifadə xüsusi aktuallıq kəsb edir.

Problemin elmi yeniliyi. Məqalədə funksiyanın törəməsi anlayışının mükəmməl tətbiqi öyrədilir. Həmçinin riyazi düsturlara daha yaradıcı yanaşma yollarını, ümumi hallarda kənara çıxmalar - istisna alları varmı? sualına praktik cavab hazırlığının olması araşdırılır.

Problemin praktik əhəmiyyəti. Baxılan isbat üsullarından istifadə etməklə riyaziyyatın tədrisində daima aktual olan və öyrədənlər üçün stimulyaradıcı, öyrənənlər üçün isə stimulverici kimi metodiki xüsusiyyətlərin formalaşdırılması baxımından əhəmiyyətlidir.

Ədəbiyyat

1. Туманов, С.И. Поиски решения задач /–Москва: Просвещение, –1969. –267 с.
2. Ивлев, Б.М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Учебн. пособие для 10-11 кл. средн. Школы / Б.М. Ивлев, Шварцбурд С.И. –М.: Просвещение, –1990. –350 стр.
3. İbrahimov, Ə.Y. Çətinlik dərəcəsi yüksək olan riyaziyyat məsələlərinin həlli üzrə praktikum. / Ə.Y. İbrahimov, A.Y. Kreymer, S.N. Sadıqov –Bakı: –1975. –287 s.
4. Yaqubov, M.H. Riyaziyyat. Məsələ və misallar. –B.: Çaşıoğlu, –2009. –310 s.

Redaksiyaya daxil olub:15.10.2025