

**RİYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI**  
**METHODOLOGY OF TEACHING MATHEMATICS**  
**МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ**

UOT 372.851

**Əhməd Nüsrət oğlu Məmmədov**  
*Bakı Biznes Universitetinin müəllimi,*  
*pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru*  
<https://orcid.org/0009-0004-4475-9681>  
*E-mail: ahmed.mamedov.62@bk.ru*

**Ramiz Məmmədcafər oğlu Bəyaliyev**  
*Bakı Biznes Universitetinin müəllimi,*  
*riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru*  
<https://orcid.org/0009-0006-6032-1596>  
*E-mail: ramiz.beyaliyev.@gmail.com*  
[https://doi.org/10.69682/arti.2026.93\(2\).127-134](https://doi.org/10.69682/arti.2026.93(2).127-134)

**“XƏTTİ CƏBR VƏ RİYAZİ ANALİZ” KURSUNDA RİYAZİ ANALİZ  
ELEMENTLƏRİNİN ÖYRƏDİLMƏSİ PROSESİNDƏ KONTRMİSALLARDAN  
İSTİFADƏNİN REALLAŞDIRILMASINA DAİR**

**Ahmad Nusrat Mammadov**  
*lecturer at Baku Business University,*  
*doctor of philosophy in pedagogy,*

**Ramiz Memmedjafar Beyaliyev**  
*lecturer at Baku Business University,*  
*doctor of philosophy in Mathematics*

**ON THE IMPLEMENTATION OF THE USE OF COUNTEREXAMPLES IN THE  
PROCESS OF TEACHING ELEMENTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS IN THE  
COURSE OF “LINEAR ALGEBRA AND MATHEMATICAL ANALYSIS”**

**Ахмед Нусрат оглы Мамедов,**  
*преподаватель Бакинского Университета Бизнеса,*  
*доктор философии по педагогике*

**Рамиз Мамедджафар оглы Беялиев**  
*преподаватель Бакинского Университета Бизнеса,*  
*доктор философии по математике*

**О РЕАЛИЗАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНТРИМЕРОВ В ПРОЦЕССЕ  
ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В КУРСЕ  
“ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА”**

**Xülasə.** Təqdim olunan iş texniki və iqtisadiyönlü Ali məktəblərin “Xətti cəbr və Riyazi analiz” kursunda Riyazi analiz elementlərinin öyrədilməsi prosesində təlimin səmərəliliyinin yüksəldilməsində mühüm rol oynayan kontrmisallardan istifadə materiallarına həsr olunub. Kontrmisallar əsasən Riyazi analiz kursunun birdəyişənli funksiyalara aid olan hissəsini (inteqral hesabı elementlərinə qədər) əhatə edir.

Riyazi analizə dair materiallarda bir çox teorem və digər təkliflərin tərsinin doğru olub-olmaması, təkliflərdəki şərtlərin ən azı birinin ödənmədiyi halda hökmün doğru olmadığını, təkliflərin kafi (zəruri) olub, zəruri (kafi) olmadığını nümayiş etdirən misalların (kontrmisalların) qurulması məsələləri burada öz əksini tapmışdır.

Bütün bunlar digər riyazi fənlərin həmçinin riyazi analiz elementlərinin daxil olduğu fənlərin (“Ekonometrika”, “Marketinqin idarə olunması”, “Makroiqtisadiyyat”, “Riyazi statistika”, “Ehtimal nəzəriyyəsi” və s.) də tələbələr tərəfindən yüksək səviyyədə mənimsəmələrində mühüm rol oynayır. Onu da qeyd etmək ki, nəinki Riyazi analizin bütün mövzularında, həmçinin “Xətti cəbr”, “Analitik həndəsə”, “Diferensial tənliklər” və s. fənlərin tədrisi prosesində kontrmisallardan istifadə tələbələrin müstəqil işləmə, məntiqi təfəkkürünün inkişafında, yaradıcılıq qabiliyyətlərinin artırılmasında da faydalı hesab olunur.

**Açar sözlər:** *kontrmisal, birtərəfli limitlər, birtərəfli törəmələr, qeyri-müəyyənlik, Roll teoremi, Laqranj teoremi, Koşi teoremi, Lopital-Bernulli qaydaları, Dirixle funksiyas*

**Abstract.** The presented work is devoted to materials on the use of counterexamples, which play an important role in increasing the effectiveness of teaching elements of Mathematical Analysis in the course “Linear Algebra and Mathematical Analysis” in technical and economic higher education institutions. The counterexamples mainly cover the part of the Mathematical Analysis course related to functions of one variable (up to the elements of integral calculus). The materials on Mathematical Analysis reflect issues related to constructing examples (counterexamples) that demonstrate whether the converse of a theorem or another statement is true, that a statement is not valid when at least one of its conditions is not satisfied, and that certain conditions may be sufficient (necessary) but not necessary (sufficient). All of this plays an important role in helping students master at a high level other mathematical subjects, as well as disciplines that include elements of Mathematical Analysis (“Econometrics,” “Marketing Management,” “Macroeconomics,” “Mathematical Statistics,” “Probability Theory,” etc.). It should also be noted that the use of counterexamples is considered beneficial not only in all topics of Mathematical Analysis, but also in the teaching of such subjects as “Linear Algebra,” “Analytic Geometry,” “Differential Equations,” and others. It contributes to the development of students’ independent working skills, logical thinking, and enhancement of their creative abilities.

**Key words:** *counterexample, one-sided limits, one-sided derivatives, indeterminate forms, Rolle’s theorem, Lagrange’s theorem, Cauchy’s theorem, L’Hôpital–Bernoulli rules, Dirichlet function*

**Аннотация.** Представленная работа посвящена материалам по использованию контрпримеров, значимых в повышении эффективности обучения при изучении элементов математического анализа в курсе «Линейная алгебра и математический анализ» в технических и экономических вузах. Контрпримеры охватывают в основном ту часть курса математического анализа, которая относится к функциям одной переменной (до элементов интегрального исчисления). В материалах по математическому анализу нашли отражение вопросы построения примеров (контрпримеров), показывающих, является ли верной обратная теорема или другое утверждение, что при невыполнении хотя бы одного условия утверждение не является истинным, а также демонстрирующих, что данные условия могут быть достаточными (необходимыми), но не необходимыми (достаточными). Все это играет важную роль в более глубоком усвоении студентами других математических дисциплин, а также предметов, включающих элементы математического анализа («Эконометрика», «Управление маркетингом», «Макроэкономика», «Математическая статистика», «Теория вероятностей» и др.). Следует отметить, что использование контрпримеров является полезным не только при изучении всех разделов математического анализа, но и при преподавании таких дисциплин, как «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальные уравнения» и др. Это способствует развитию у студентов навыков самостоятельной работы, логического мышления и повышению их творческих способностей.

**Ключевые слова:** *контрпример, односторонние пределы, односторонние производные, неопределенность, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши, правила Лопиталья–Бернулли, функция Дирихле*

Məlum olduğu kimi “Xətti cəbr və Riyazi analiz” kursu texniki və iqtisadiyönlü ali məktəblərdə tədris olunan fənlər içərisində xüsusi yer tutur. Fənnin öyrənilməsi digər bir çox fənlərin: “Xətti cəbr və analitik həndəsə”, “Ehtimal nəzəriyyəsi”, “Riyazi statistika”, “Ekonometrika” (Ekonometrika-1, Ekonometrika-2), “Biznes fəaliyyətinin təhlili”, “Marketinqin idarə olunması”, “Makroiqtisadiyyat” və s. öyrənilməsi istiqamətində müəyyən mənada baza rolunu oynayır.

“Xətti cəbr və Riyazi analiz” kursunun demək olar ki, bir çox bölməsi bu və ya digər formada qeyd etdiyimiz yuxarıdakı fənlərin materiallarının məzmununa daxildir. Burada yalnız Riyazi analizin bəzi elementlərinin (birdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı) təlim prosesində öyrənilməsində istifadə olunan kontrmisallardan bəhs edilir.

Giriş üçün qeyd edək ki, müasir dövrdə iqtisadiyyatın rəqabətə davamlılığı, insanların rifahının yüksəldilməsi istiqamətində dövlətimizin məqsədyönlü fəaliyyəti ali məktəblər, həmçinin, texniki, iqtisadiyönüü ali məktəblər qarşısında təlimin keyfiyyətinin yüksəldilməsi və nəticədə onun müxtəlif sahələrdə tətbiqi məqsədini qoyur. Ölkəmizdə təhsil sahəsində təkmilləşdirmələr, dövlət proqramları, bu sahədə dövlətin strategiyaları əsasında həyata keçirilir. Azərbaycan təhsilinin modernləşdirilməsinin müasir mərhələsi, müxtəlif texnologiyaların tətbiq olunması, texniki avadanlıqların təlim prosesinə gətirilməsi, müxtəlif metodikaların təlim prosesində tətbiq olunması texniki, iqtisadiyönlü fakültələrdə tələbələrin (bakalavriatlar, o cümlədən, magistrantlar) elmlərin əsaslarına yiyələnmələrində, onlarda peşə bacarıqlarının inkişafında müstəsna əhəmiyyət kəsb edir və tələbələr qarşısında yüksək tələblər qoyur. “Xətti cəbr və Riyazi analiz” kursunun (fənninin) proqramının “Fənnin təsviri” bölməsində qeyd olunduğu kimi fənnin tədrisində bir çox məqsədlər həyata keçirilir. Onlardan bəzilərini, yəni riyazi analizə dair olan məqsədləri qeyd edək (“Xətti cəbr və Riyazi analiz” fənni üzrə proqram. BAKI-2023.səh.3).

M3. Ədədi ardıcılıqların növlərini təyin etməyi, bəzi ədədi ardıcılıq və funksiyaların limitlərini tapmağı, funksiyaların kəsilməzliklərini araşdırmağı bacarmaq. M4. Birdəyişənli funksiyaların törəmələrini tapmağı, qeyri-müəyyənlikləri açmağı, funksiyaların Makloren düsturu üzrə ayrılışını yazmağı, törəmənin köməyi ilə funksiyaları araşdırmağı bacarmaq və s. Göstərilən məqsədlərin həyata keçirilməsi nəticəsi olaraq tələbələr Riyazi analiz elementlərini mənimsəyir və həmin proqramın “Fənnin təlim nəticələri” hissəsində qeyd olunduğu kimi tələbələr “e” ədədinə və başqa mühüm limitlərə gətirilən bəzi ardıcılıqların, funksiyaların limitlərini hesablamağı, funksiyaların kəsilməzliklərini araşdırmağı, birdəyişənli funksiyaları diferensiallanmağı, diferensial hesabının köməyi ilə birdəyişənli funksiyaları araşdırmağı bacarmalıdırlar və s. Göstərdiyimiz kimi burada yalnız birdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı ilə bağlı bəzi məqamları qeyd edəcəyik.

Riyazi analiz elementlərinin yüksək səviyyədə mənimsənilməsi üçün dərslərdə bir çox metod və vasitələrdən istifadə imkanları vardır. Onlardan biri də təlim prosesində tədrisin səmərə və keyfiyyətinin yüksəldilməsində kontrmisallardan istifadə etməklə onun reallaşdırılmasıdır.

Məlumdur ki, riyaziyyatın təlimi prosesində hər hansı hökmün doğruluğunu nümayiş etdirən, yəni onu illüstrasiya edən misallar göstərilir. Bundan sonra təlim prosesinin effektivliyinə təsir edən verilən hökmün tərsinin, həmçinin bu və ya digər şərtlər dəyişdikdə hökmün doğru olub-olmamasını göstərən misallar qurulur. Belə misallara Riyaziyyatda kontrmisallar (bu terminin sinonimi kimi “əksmisallar” da işlətmək olar) deyilir. Belə kontrmisalların qurulması təlimin səmərəliliyini artırır, keyfiyyətini yüksəldir, tələbələrin yaradıcılıq meyllərinin artırılmasına müsbət təsir edir.

Bu fənn 1-ci tədris ilinin ilk semestrindən tədris olunur (I kurs). Ona görə də tədrisə daha ciddi yanaşılmalı, tələbələrə bu fənnin incəlikləri (lazımı səviyyədə) səmərəli şəkildə çatdırılmalıdır. Xətti cəbrin elementləri tədris olunduqdan sonra (**mövzu 1-4**) Riyazi analiz elementləri (**mövzu 5-23**) tədris olunur. Burada bir neçə mövzunun öyrənilməsində kontrmisallardan istifadə imkanlarından bəhs olunur. İlk olaraq “Ədədi ardıcılıq və onun limiti” (**mövzu-5**) mövzusunda istifadə olunan (qurulan) bəzi kontrmisalları bir neçə teorem üzərində nəzərdən keçirək.

**Teorem1.** Əgər  $\{x_n\}$  və  $\{y_n\}$  ardıcılıqlarının hər biri yığılırsa onda onların cəmi (fərqi) də hasili və nisbəti də yığılır və  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ ). (Cəmin (fərqin), hasilin və nisbətənin yığılması üçün kafi şərt) Burada təbii olaraq qarşıya belə bir sual çıxır: Bu teoremin tərsi də həmişə doğrudurmu? Yəni, cəmin, fərqin, hasilin, nisbətənin yığılan olmasından ardıcılıqların hər birinin yığılan (sonlu limitinin) olmasını həmişə hökm etmək olarmı? Yəni, teoremi zəruri və kafi şərt (kriteriya,meyar) kimi vermək olmazmı? Aşağıdakı ardıcılıqlar üzərində teoremin (cəm (fərq) üçün) tərsinin doğru olmadığını görmək olar.

**Misal 1.**  $x_n = 1 + \sqrt{n}$  və  $y_n = 2 - \sqrt{n}$  ardıcılıqlarının cəmi  $z_n = x_n + y_n = 3$  olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 3$  alırıq. Lakin götürülən  $\{x_n\}$  və  $\{y_n\}$  ardıcılıqlarının hər biri dağılır. Deməli, cəm yığılan olduqda hər bir ardıcılıq dağıla da bilər. **Misal 2.**  $x_n = \sin^2 n$ ,  $y_n = -\cos^2 n$  ardıcılıqlarının hər biri dağılır. Lakin onların fərqi  $x_n - y_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 1$ , yəni yığı-

landır. Göründüyü kimi, bu halda da fərqi yığılan olmasından azalan və çıxılan ardıcılıqların hər birinin yığılan olmasını hökm etmək olmaz.

**Misal 3.**  $x_n = n$  və  $y_n = \sin \frac{\pi}{3n}$  ardıcılıqlarının hasilinə baxaq:  $x_n \cdot y_n = n \cdot \sin \frac{\pi}{3n} = \frac{\sin \frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n \cdot \pi}} = \frac{\pi}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}} = \frac{\pi}{3}$ , yəni hasil yığılandır ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$  olması nəzərə alınıb). Lakin  $x_n = n$ -dağılan,  $y_n = \sin \frac{\pi}{3n}$  yığılandır. Yəni bu halda hər bir ardıcılıq yığılan deyil. Deməli, hasilin yığılan olmasından ayrı-ayrı ardıcılıqların yığılan olması həmişə alınmır.

**Misal 4.**  $x_n = n^5 + n^2 - 1$  və  $y_n = 3n^5 + 2n^2 - 4n + 1$  ardıcılıqlarının hər biri dağılandır:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 + n^2 - 1) = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^5 + 2n^2 - 4n + 1) = \infty$

$$\text{Lakin } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^5 + n^2 - 1}{3n^5 + 2n^2 - 4n + 1} \right) = \frac{1}{3}$$

Deməli, dağılan ardıcılıqların da nisbəti yığılan ola bilər, yəni bu halda da tərs teorem həmişə ödənmir ( $x_n = (-1)^n$  və  $y_n = 3n + 2$  dağılan ardıcılıqları üçün də baxmaq olar).

**Teorem 2.**  $\{x_n\}$  və  $\{y_n\}$  ardıcılıqları üçün elə  $N$  nömrəsi varsa ki,  $n > N$  şərtini ödəyən  $n$ -lər üçün  $x_n \geq y_n$  (yaxud  $x_n \leq y_n$ ) bərabərsizliyi ödəyir və  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  sonlu limitləri varsa, yəni ardıcılıqların hər biri yığılarsa onda  $a \geq b$  (yaxud  $a \leq b$ ) bərabərsizliyi ödəyir. Burada da təbii olaraq belə sual yaranır: Teoremin şərtində “ $\geq$ ” (yaxud “ $\leq$ ”) işarəsi əvəzinə “ $>$ ” (yaxud “ $<$ ”) olduqda da hökm etmək olarmı ki,  $a > b$  (yaxud  $a < b$ ) bərabərsizliyi də doğrudur?

**Misal 5.**  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}; y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  götürsək,  $x_n > y_n$  olduğu aşkardır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  olmasından alınır ki,  $0 > 0$ . Bu isə ola bilməz. Deməli, teoremin şərtində “ $\geq$ ” (yaxud “ $\leq$ ”) olması vacib şərtlərdir.  $x_n \geq y_n$  (yaxud  $x_n \leq y_n$ ) əvəzinə  $x_n > y_n$  (yaxud  $x_n < y_n$ ) götürsək teoremin hökmü doğru olmaz. Bu mövzuda digər təkliflərdə də kontrmisallardan istifadə imkanları böyükdür. Fənnin təlimi prosesində “Funksiyanın limiti” (**mövzu 6.**) mövzusunda da kontrmisallardan istifadə mümkündür.

**Teorem 3.** Əgər  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyaları  $x_0$  nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunubsa və  $x_0$  nöqtəsində limitləri uyğun olaraq  $A$  və  $B$ -yə bərabər olarsa, onda  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$  və  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$  olduqda  $\frac{f(x)}{g(x)}$  funksiyalarının da  $x_0$  nöqtəsində limitləri var və həmin limitlər uyğun olaraq  $A \pm B, A \cdot B$  və  $\frac{A}{B}$ -yə bərabərdir. Başqa sözlə desək, sağdakı limitlər varsa  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  bərabərlikləri doğrudur.

Burada da təbii ki, belə sual yaranır. Kontrsuall:  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$  funksiyalarının hər birinin müəyyən  $x_0$  nöqtəsində limitlərinin olmasından  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyalarının hər birinin  $x_0$  nöqtəsində limitinin olmasını hökm etmək olarmı?

**Misal 6.**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \text{ olarsa} \\ -3, & x = 0 \text{ olarsa} \\ 2x - 10, & x > 0 \text{ olarsa} \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 5 - x, & x < 0 \text{ olarsa} \\ 10, & x = 0 \text{ olarsa} \\ 17 - 2x, & x > 0 \text{ olarsa} \end{cases} \text{ funksiyasının cəmi}$$

$\varphi(x) = f(x) + g(x) = 7$  funksiyasının istənilən nöqtədə, o cümlədən

$x_0 = 0$  nöqtəsində limiti var və  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 7$ . Lakin nə  $f(x)$ -in nə də  $g(x)$ -in  $x_0 = 0$  nöqtəsində limiti yoxdur:  $f(0+) = -10 \neq f(0-) = 2; g(0+) = 17 \neq g(0-) = 5$  (hər iki funksiya üçün birtərəfli limitlər müxtəlifdir) Bu da onu göstərir ki, cəm funksiyanın limitinin olmasından toplanan funksiyaların hər birinin limitinin olmasını həmişə hökm etmək olmaz. İki funksiyanın nisbəti üçün də kontrmisal qurmaq olar:

**Misal 7.**  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  və  $g(x) = \frac{1}{x}$  funksiyalarının hər birinin  $x_0 = 0$  nöqtəsində limiti yoxdur (sonlu). Belə ki,  $x'_n = \frac{2}{\pi + 4\pi n}$  və  $x''_n = \frac{-2}{\pi - 4\pi n}$  kimi iki ardıcılıq götürsək (Funksiyanın limitinin Heyne mənadında (ardıcılıq dilində) tərif).

$\lim_{x \rightarrow 0} x'_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi + 4\pi n} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x''_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\pi - 4\pi n} = 0$  olduğundan  $\{x'_n\}$  və  $\{x''_n\}$  ardıcılıqlarının hər biri 0-a yığılır, lakin  $f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$  və  $f(x''_n) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$  ardıcılıqları uyğun olaraq 1 və  $-1$ -ə yığılır. Deməli,  $f(x) = \sin\frac{1}{x}$  funksiyasının  $x_0 = 0$  nöqtəsində limiti yoxdur. Lakin  $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\sin\frac{1}{x}\right) \cdot x$  funksiyasının  $x_0 = 0$  nöqtəsində limiti 0-a bərabərdir:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ . Çünki,  $\alpha(x) = x, x \rightarrow 0$  olduqda sonsuz kiçilən,  $f(x) = \sin\frac{1}{x}$  funksiyası isə  $x_0$  nöqtəsinin ətrafında məhdud funksiyadır. Məhdud funksiyanın sonsuz kiçilən funksiya hasili sonsuz kiçiləndir, yəni limiti 0-dır. Bu da onu göstərir ki, nisbət funksiyanın limitinin olmasından (burada limit 0-dır) komponentlərin (bölünən və bölən) hər birinin limitinin olmasını həmişə hökm etmək olmaz.

Bu və ya digər istiqamətdə kontrmisalları "Birdəyişənli funksiyanın kəsilməzliyinə dair materialların mənimsədilməsində də qurmaq mümkündür. Fikrimizi aşağıdakı bir teorem üzərində izah edək.

**Teorem 4.** Tutaq ki,  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyaları hər hansı  $X$  çoxluğunda təyin olunub və  $x_0 \in X$  nöqtəsində kəsilməzdir. Onda  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ( $g(x_0) \neq 0$ ) funksiyaları da  $x_0$  nöqtəsində kəsilməz olar və aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = f(x_0) \pm g(x_0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f(x_0) \cdot g(x_0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$  ( $g(x_0) \neq 0$ ). Burada da, təbii ki, tələbələrin qarşısına belə sual çıxır.  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyalarının cəminin (fərqinin), hasilinin və nisbətinin  $x_0$  nöqtəsində kəsilməz olmasından hər bir funksiyanın  $x_0$  nöqtəsində kəsilməz olduğunu həmişə hökm etmək olarmı?

Tərs təklifin həmişə doğru olmadığını aşağıdakı kontrmisalla göstərək:

**Misal 8.**

$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 < x < 5 \text{ olarsa} \\ -3, & 0 < x \leq 1 \text{ olarsa} \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 5 - x, & 1 < x \leq 5 \text{ olarsa} \\ 7, & 0 < x \leq 1 \text{ olarsa} \end{cases}$  Göründüyü kimi, bu funksiyaların hər biri  $x_0 = 1$  nöqtəsində kəsiləndir və bu nöqtə 1-ci növ kəsilmə nöqtəsidir (limitlər sonludur):

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x - 1) = 0 \text{ (sağ limit)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-3) = -3 \text{ (sol limit)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (5 - x) = 4 \text{ (sağ limit)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (7) = 7 \text{ (sol limit)}$$

Hər bir funksiya üçün birtərəfli limitlər müxtəlifdir və deməli, bu funksiyaların hər biri  $x_0 = 1$  nöqtəsində kəsilməz deyil. Lakin, onların cəmi  $f(x) + g(x) = 4$  (sabit) funksiyası bütün həqiqi oxda, o cümlədən  $x_0 = 1$  nöqtəsində də kəsilməzdir. Bu isə o deməkdir ki, cəm funksiya müəyyən nöqtədə kəsilməz olduqda ayrı-ayrı toplanan funksiyalar həmin nöqtədə kəsilməz olmaya bilər. (Bunu üç və daha çox funksiya misalında da görmək olar)

**Misal 9.**  $f(x) = [x]$  ( $x$  ədədinin tam hissəsi) və  $g(x) = \{x\}$  ( $x$  ədədinin kəsr hissəsi) funksiyalarının cəmini  $\varphi(x)$  ilə işarə edək.  $\varphi(x) = [x] + \{x\} = x$  ( $x$  ədədi özünün tam hissəsi ilə kəsr hissəsinin cəminə bərabərdir)  $\varphi(x) = x$  funksiyası bütün həqiqi oxda, o cümlədən  $x_0 = n$  (tam ədəd) nöqtələrində kəsilməzdir. Lakin  $f(x) = [x]$  və  $g(x) = \{x\} = x - [x]$  funksiyalarının hər biri  $x_0 = n$  (tam) nöqtələrində kəsiləndir.

$\lim_{x \rightarrow n+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+0} [x] = n$ ,  $\lim_{x \rightarrow n-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-0} [x] = n - 1$  ( $n \neq n - 1$ )  $\lim_{x \rightarrow n+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow n+0} (x - [x]) = n - n = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow n-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow n-0} (x - [x]) = n - (n - 1) = 1$  ( $0 \neq 1$ ) Başqa sözlə desək,  $f(n + 0) \neq f(n - 0)$ ,  $g(n + 0) \neq g(n - 0)$ . Ona görə də belə nəticəyə gəlirik ki, cəm funksiya kəsilməz olduqda ayrı-ayrı funksiyalar kəsilməz olmaya bilər. Yəni, kəsilməz funksiyaların da cəmi kəsilməz ola bilər. Deməli, cəm halı üçün teoremin tərsi ümumiyyətlə, doğru deyil.

**Misal 10.**

$$f(x) = x, g(x) = D(x) = \begin{cases} 1, x - \text{rasional olduqda} \\ 0, x - \text{irrasional olduqda} \end{cases} \text{ (} D(x)\text{-Dirixle funksiyasıdır.) } f(x) \text{ və}$$

$g(x)$  funksiyalarının hasilini  $\varphi(x)$  ilə işarə edək.  $\varphi(x) = f(x) \cdot D(x)$ . Məlumdur ki, Dirixle funksiyası həqiqi oxun hər bir nöqtəsində kəsiləndir.  $f(x) = x$  funksiyası bütün həqiqi oxda, o cümlədən  $x_0 = 0$  nöqtəsində də kəsilməzdir.

$$\varphi(x) = f(x) \cdot D(x) = \begin{cases} 1, x - \text{Rasional olduqda} \\ 0, x - \text{irrasional olduqda} \end{cases} \varphi(x) \text{ funksiyası } x_0 \text{ nöqtəsində kəsilməz}$$

dir. Göründüyü kimi,  $f(x)$  və  $D(x)$  funksiyalarının hər biri kəsilməz deyil ( $f(x)$ -kəsilməz,  $D(x)$ -kəsilən), yəni hasil funksiyanın kəsilməz olmasından vuruc funksiyaların hər birinin kəsilməz olmasını, ümumiyyətlə hökm etmək olmaz.

**Misal 11.**  $f(x) = D(x)$  ( $D(x)$ -Dirixle funksiyasıdır) və  $g(x) = D(x + \pi)$  funksiyalarının hasil  $f(x) \cdot g(x) = D(x) \cdot D(x + \pi) = 0$ .  $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$  işarə etsək, bu halda  $\varphi(x) = 0$ . Göründüyü kimi,  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyalarının hasil olan  $\varphi(x) = 0$  funksiyası bütün həqiqi oxda kəsilməzdir. Lakin nə  $f(x)$ , nə də  $g(x)$  funksiyaları bu halda kəsilməz deyil. Başqa sözlə desək, kəsilən funksiyaların da cəmi kəsilməz ola bilər. Yəni hasil funksiyanın kəsilməz olmasından vuruc funksiyaların hər birinin kəsilməz olmasını hökm etmək olmaz. “Xətti cəbr və Riyazi analiz” fənninin materialları içərisində “Funksiyanın törəməsi, Diferensiallanan funksiya və funksiyanın diferensialı” (“Xətti cəbr və Riyazi analiz” fənni üzrə proqram. Bakı-2023. Mövzu 8) xüsusi yer tutur. Burada da bir sıra təkliflərin (teoremlərin və s.) şərh olunması prosesində anlayışların düzgün dərk olunmasında və əsaslandırılmasında kontrmisallardan istifadə əhəmiyyətlidir. Bunu bir neçə teorem üzərində izah edək.

**Teorem 5.** (Diferensiallanan funksiyalar üzərində əməllər) Əgər  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyalarının hər biri müəyyən  $x_0$  nöqtəsində diferensiallandırsa, onların cəmi (fərqi), hasilı və nisbəti ( $g(x_0) \neq 0$ ) də bu nöqtədə diferensiallandırsa və

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x_0) \neq 0) \text{ bərabərlikləri doğrudur. Təbii ki, qarşıya belə bir sual çıxır: Teoremin tərsi də həmişə doğru ola bilərmi? Yəni cəm (fərq), hasil, nisbət funksiyalarının diferensiallanan (sonlu törəməsi olan) olmasından ayrı-ayrı funksiyaların diferensiallanan olmasını həmişə hökm etmək olarmı? Başqa sözlə desək, diferensiallanmayan funksiyaların cəmi (fərqi), hasilı, nisbəti də həmişə diferensiallandırmı? Aşağıdakı misallara baxaq:}$$

**Misal 12.**  $f(x) = \begin{cases} x - 2, x < 1 \text{ olarsa} \\ x^2, x \geq 1 \text{ olarsa} \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 2, x < 1 \text{ olarsa} \\ x - x^2, x \geq 1 \text{ olarsa} \end{cases}$  Aydındır ki,  $f'(x) = \begin{cases} 1, x < 1 \text{ olarsa} \\ 2x, x \geq 1 \text{ olarsa} \end{cases}, g'(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \text{ olarsa} \\ 1 - 2x, x \geq 1 \text{ olarsa} \end{cases}$

$$f'(1 + 0) = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (sağ törəmə)}, f'(1 - 0) = 1 \text{ (sol törəmə)}, \text{ yəni } f'(1 + 0) \neq f'(1 - 0) \\ g'(1 + 0) = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \text{ (sağ törəmə)}, g'(1 - 0) = 0 \text{ (sol törəmə)}, \text{ yəni } g'(1 + 0) \neq g'(1 - 0)$$

Bu o deməkdir ki,  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyaları  $x_0 = 1$  nöqtəsində diferensiallanan deyil. Lakin bu funksiyaların cəmi olan  $\varphi(x) = f(x) + g(x) = x$  funksiyası və  $\varphi'(1 + 0) = 1, \varphi'(1 - 0) = 0$  olduğundan diferensiallandıdır. Hasil, nisbət üçün də analoji kontrmisallar qurmaq olar ki, bu da teoremin tərsinin həmişə doğru olmadığını özündə ehtiva edir. **“Diferensial hesabının əsas teoremləri”** mövzusunda mühüm tətbiqi əhəmiyyət olan Roll teoremini nəzərdən keçirək.

**Teorem 6. (Roll).** Əgər  $f(x)$  funksiyası:

1.  $[a, b]$  parçasında təyin olunub, kəsilməzdirsə,
2.  $(a, b)$  intervalının hər bir nöqtəsində sonlu və ya müəyyən işarəli sonsuz törəməsi varsa,
3.  $[a, b]$  parçasının uclarında bərabər qiymət alarsa, yəni  $f(a) = f(b)$  olarsa,

onda elə  $\xi \in (a, b)$  nöqtəsi var ki, həmin nöqtədə  $f'(\xi) = 0$ . Teoremin tələbələrə çatdırılmasında hər bir şərtin vacibliyi qeyd olunmalıdır ki, hökm doğru olsun. Şərtlərdən hər hansı biri-

ni nəzərə almasaq, onda  $(a, b)$  intervalında elə  $\xi$  nöqtəsi tapmaq olmaz ki,  $f'(\xi) = 0$  olsun. Aşağıdakı misala nəzər yetirək.

**Misal 13.**  $f(x) = |x|$  funksiyasına  $[-1; 1]$  parçasında baxaq.  $a = -1, b = 1$  götürsək  $f(a) = f(b)$ , yəni  $f(-1) = f(1)$  olması aşkardır (3-cü şərt ödənilir). Təyin oblastı:  $[-1; 1]$ . Lakin  $(-1; 1)$  intervalının hər bir nöqtəsində diferensiallanan deyil. Çünki,  $x_0 = 0$  nöqtəsində sağ və sol törəmələr bərabər olmadığından  $(a, b)$ -də, yəni  $(-1; 1)$ -də diferensiallanan deyil:  $f'(-0) = -1, f'(0) = 1$ . Deməli, Roll teoreminin şərtlərindən biri ödənilir. Ona görə də teoremin doğru olması üçün hər bir şərt vacibdir. Daha bir misalı nəzərdən keçirək.

**Misal 14.**  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 1 \text{ olarsa} \\ x - 2, & 1 < x \leq 2 \text{ olarsa} \end{cases}$  funksiyası göründüyü kimi,  $[-1; 2]$  parçasının hər bir nöqtəsində təyin olunub. Uclarda bərabər qiymətlər alır:  $f(-1) = 0, f(2) = 0$ , həmçinin  $x_0 = 1$  nöqtəsində kəsilməz deyil, o cümlədən verilmiş funksiyanın  $f'(x)$  törəməsi heç bir nöqtədə sıfıra bərabər deyil. Birdəyişənli funksiyanın diferensial hesabı bölməsində əsas teoremlərdən olan Laqranj teoremini nəzərdən keçirək.

**Teorem 7. (Laqranj).** Əgər  $f(x)$  funksiyası:

1)  $[a, b]$  parçasında təyin olunub, kəsilməzdirsə  
2)  $(a, b)$  intervalında sonlu və ya müəyyən işarəli sonsuz törəməsi varsa (diferensiallandırsa) onda  $(a, b)$  intervalında elə  $\xi$  nöqtəsi var ki,  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$  bərabərliyi doğrudur. Burada da təbii ki, aşağıdakı suallar yaranır:

1) Yalnız  $[a, b]$  parçasında funksiya kəsilməz olarsa Laqranj teoremi doğru olarmı?  
2)  $[a, b]$  parçasında təyin olunub, kəsilməz olmazsa teorem doğru olarmı? Və s. Aşağıdakı misal baxaq:

**Misal 15.**  $f(x) = \frac{1}{x}, [-1; 3]$  qəbul edək.  $x_0 = 0 \in [-1; 3]$  nöqtəsində funksiya kəsilməz deyil (II növ kəsilmə nöqtəsi)  $a = -1, b = 3$  olduğundan  $f(3) - f(-1) = f'(\xi)(3 - (-1)) \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{\xi^2} \cdot 4$  Buradan da  $f'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{3}$ .

Bu bərabərlik isə doğru deyil. Ona görə də  $f(x) = \frac{1}{x}$  funksiyasına  $[-1; 3]$  parçasında Laqranj teoremini tətbiq etmək olmaz.

Yoxlamaq olar ki,  $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \text{ olarsa} \\ 1, & x = 1 \text{ olarsa} \end{cases}$  funksiyası da Laqranj teoreminin hər bir şərtini ödəmir.

Roll və Laqranj teoremlərinin ümumiləşməsi olan Koşi teoreminin mənimsənilməsi prosesində də müvafiq kontrmisallardan istifadə imkanları vardır.

**Teorem 8. (Koşi).** Əgər  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyaları 1)  $[a, b]$  parçasında təyin olunub, kəsilməzdirsə, 2)  $(a, b)$  intervalında hər bir nöqtəsində sonlu törəməsi varsa və həmçinin  $g'(x) \neq 0$  Onda  $(a, b)$  intervalının daxilində elə  $\xi$  nöqtəsi var ki,  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  bərabərliyi doğrudur. Bu teoremin şərtində aşağıdakı sual qoyula bilər:  $g(a) = g(b)$  olması mümkündürmü? Əksini fərz edək. Əgər  $g(a) = g(b)$  olarsa, Roll teoreminə görə  $(g(x))$  funksiyanın  $(a, b)$  intervalı daxilində hər hansı  $c$  nöqtəsində törəməsi 0-a bərabər olar, yəni  $g'(c) = 0$ . Bu da Koşi teoremini şərtlərinə ziddir. Burada da aşağıdakı sualı qoymaq olar (bu sual təbii olaraq yaranır): Koşi teoremindəki şərtlərdən biri ödənməzsə teoremin hökmü doğru olarmı? Aşağıdakı kontrmisala baxaq:

**Misal 16.**  $f(x) = e^x, g(x) = \frac{1+|x|}{|x|}$  funksiyalarına  $[-2; 2]$  parçasında baxaq. Göründüyü kimi  $a = -2, b = 2$  olduğundan  $g(-2) = g(2) = 1,5$  olduğundan  $g'(x) = 0$  olar ki, bu da şərtə ziddir.

Asanlıqla göstərmək olar ki,  $f(x) = x - 1, g(x) = |x - 1|$  funksiyalarına  $[-2; 3]$  parçasında Koşi teoremini tətbiq etmək olmaz (teoremin hansı şərti ödənilir? Göstərin!)

Məlum olduğu kimi, diferensial hesabı əsas qeyri müəyyənliklərin açılışında da mühüm rol oynayır. Bu "Xətti cəbr və Riyazi analiz" kursunda "Lopital-Bernulli qaydaları" (bir neçə teorem) adı ilə öyrənilir. Həmin teoremdən aşağıdakı qeydi edək.

**Teorem 9.**  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyaları  $x = x_0$  nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunub, diferensiaslanırsa ( $x = x_0$  nöqtəsi müstəsna olmaqla) həmçinin  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  ( $g(x_0) \neq 0$ ). Əgər  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  limiti varsa, onda bu funksiyaların nisbətində də limiti var və  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Bu teoremin tələbələrə mənimsədilməsində də müxtəlif kontrmisallar qoymaqla, kontrmisallar qurmaqla təlimin effektivliyini artırmaq olar.

**Misal 17.**  $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$  götürsək  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \left( x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$  (məhdud funksiya və sonsuz kiçilən funksiyanın hasilı sonsuz kiçiləndir) olduğundan verilmiş funksiyalar üçün  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Lakin verilmiş funksiyaların törəmələrinin nisbətində limiti yoxdur:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot x^2}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$  ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$  limiti mövcud deyil), yəni bu funksiyalar müvafiq qaydanı tətbiq etmək olmaz. Bu da onu göstərir ki,  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  nisbətində  $x \rightarrow x_0$  olduqda limiti varsa, onda teorem ödənilir. Daha bir misalı nəzərdən keçirək.

**Misal 18.**  $f(x) = x + \sin x$ ,  $g(x) = x$  funksiyaları üçün  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$ ,  $\left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 0 \right)$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  limiti mövcud deyil, ona görə də  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$  yoxdur. Bu da onu göstərir ki,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  limitinə Lopital-Bernulli qaydalarını tətbiq etmək olmaz. Başqa sözlə desək  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  limitinin olmamasından  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  limitinin olmaması alınmır.

**Misal 19.**  $f(x) = e^{-x}$ ,  $g(x) = e^{-x} + e^{-2x}$  götürsək  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^{-2x}}$

Göründüyü kimi, bu limit  $\frac{0}{0}$  şəklində qeyri-müəyyənlikdir.  $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-e^{-x}}{-e^{-x} - 2e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2e^{-2x}}$  olduğundan  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  limiti də  $\frac{0}{0}$  şəklində qeyri-müəyyənlik olur. Lakin verilmiş limit:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$  Deməli,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^{-2x}}$  limitinə Lopital-Bernulli qaydalarını tətbiq etmək olmaz. Burada müxtəlif hallar üçün ( $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ) də kontrmisallar qurmaq olar.

**Misal 20 (a).**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{3x}}$  limiti də  $\frac{0}{0}$  şəklində qeyri-müəyyənlikdir.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)'}{(e^{2x} + e^{3x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2e^{2x} + 3e^{3x}}$  olduğundan  $\frac{e^x}{e^{2x} + e^{3x}}$  funksiyanın  $x \rightarrow -\infty$  olduqda limitinə bu halda da Lopital-Bernulli qaydalarını tətbiq etmək olmaz. Lakin  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + e^{2x}} = \frac{1}{0} = \infty$ . Yəni verilmiş limit mövcuddur. Qeyd edək ki, digər mövzuların təlimi prosesində, biliklərin sistemli şəkildə mənimsədilməsində də müvafiq kontrmisallar qurmaq imkanları genişdir.

**Problemin aktuallığı.** Məlum olduğu kimi Ali texniki və iqtisadiyönlü məktəblərdə tədris olunan fənlər içərisində "Xətti cəbr və Riyazi analiz" fənninin xüsusi yeri olmaqla tədris olunan fənlərin öyrənilməsində müstəsna əhəmiyyət kəsb edir. Ona görə də təlimin səmərəliliyinin yüksəldilməsində bir çox metod və piyomlar var. Onlardan biri də təlim prosesində kontrmisallardan istifadədir. Kontrmisallardan istifadə istər xətti cəbr kursunda, istərsə də riyazi analizə dair olan materiallarda mövzulara daxil olan anlayışların tələbələr tərəfindən mənimsənilməsində rolu böyükdür. Bu digər yeni anlayışların yaranması baxımından da

faydalıdır. Burada fənnin riyazi analizə dair bir çox mövzuların öyrədilməsində kontrmisallara (əksmisallara) baxılır və nümunələr əsasında möhkəmləndirilir. Bu da təlimdə xüsusi aktualıq kəsb edir.

**Problemin elmi yeniliyi.** Cari işdə təlim prosesində kontrmisallardan istifadə tələbələrin riyazi analizə dair olan bilik və bacarıqlarının formalaşdırılmasında, bir çox təkliflərdəki şərtlərin birinin ödənmədiyi, yaxud tərslərinin doğru olmadığını, şərtlərin digər şərtlərlə əvəz edildikdə təkliflərin doğru olmamasını göstərmək baxımından əvəzsiz vasitələrdən biridir. Belə misallardan düzgün və yerində istifadə edildikdə tələbələrdin digər texniki fənlərin də öyrənilməsində adekvat olaraq bu cür yanaşma baxımından yeni təlim metodu kimi, təlim nəticələrinin mənimsənilməsi prosesi faydalı sonluqla yekunlaşmış olur. Həmçinin uyğun təkliflərin isə ümumi halda isbat edilməsinə ehtiyac duyulmur. Konkret nümunələr əsasında uyğun təkliflərin doğru olub-olmadığı aydınlaşır.

**Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi.** Ali texniki və iqtisadyönlü məktəblərin “Xətti cəbr və Riyazi analiz” kursunda bir çox mövzuların xüsusi ilə Riyazi analiz elementlərinin təlimində kontrmisallardan istifadə bir çox məqsədlərlə əlaqədardır:

1. Təkliflərin tərsinin doğru olub-olmadığını, yaxud təklifin zəruri, yaxud kafi olmadığını ümumi halda isbat etməyə ehtiyac olmadığını ilə

2. Təlim prosesində kontrmisallardan istifadə nəinki tələbələrin məntiqi və riyazi qabiliyyətlərinin inkişafında bir vasitədir, həmin təlim prosesində yaranan yeni anlayışların təriflərinin yaranmasında belə demək mümkünsə bir təlim metodu kimi müstəsna rolunun olması ilə

3. Digər texniki fənlərin də öyrənilməsində yeri gəldikcə kontrsual və kontrmisallar qurmaq fənnin təlim nəticələrin mənimsənilməsində və həmçinin qiymətləndirilmə meyarlarında, o cümlədən tələbələrin gələcək fəaliyyətlərində, şəxsiyyətyönümlü təlimdə yeni nailiyyətlərin qazanılmasında müstəqil düşünmə qabiliyyətlərin inkişaf edilməsi ilə bağlı olaraq.

Təcrübələr göstərir ki, nəinki Ali texniki və iqtisadyönlü məktəblərdə, həmçinin Ali pedaqoji məktəblərdə də texniki və dəqiq fənlərin mənimsənilməsində kontrmisallardan istifadə həm aktualdır, həm də tələbələrin müstəqil düşünmə və yaradıcılıq imkanlarının artırılmasında bir vasitə kimi geniş imkanlar açır.

### **Ədəbiyyat**

1. Abdullayev, S.K. və b. / Riyazi analiz/ – Bakı, 2016. – 495s.
2. Məmmədov, R.H. Ali Riyaziyyat kursu I hissə. / R.H. Məmmədov. – 497s.
3. Cəbrayılov, M.S. və b. / Riyazi analiz. – Bakı, 2008. – 450s.
4. Səbzəliyev, M.M. Xətti cəbr və riyazi analiz / M.M. Səbzəliyev, İ.M. Səbzəliyeva. – Bakı, 2019. – 388 s.
5. Məmmədov, Ə.N. Riyazi analizdən praktikum / Ə.N. Məmmədov – Bakı, 2016. – 397s.
6. Məmmədov, M.Z. Xətti cəbr və riyazi analiz kursu. I cild. / M.Z. Məmmədov, R.B. Aliyev. –Bakı, 2025. – 344s
7. Гелбаум, Ф.Б. Контрпримеры в анализе / Ф.Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. –Москва, 1967. – 252с.
8. Demidoviç, B.P. “Riyazi analizdən məsələ və misallar” (Rusçadan tərcümə). / B.P. Demidoviç. – Bakı, 2003. –544s.
9. Davidov, N.A. Riyazi analizdən məsələlər / N.A. Davidov, P.P. Korovkin, V.N. Nikolski (Rusçadan tərcümə). – Bakı, 2010. – 378 s.
10. Musayev, V.M. Riyazi analizin başlanğıcının tədrisinə dair mülahizələr / V.M. Musayev. – Bakı, 2009. – 162 s.
11. Məmmədov Ə.N. Ali pedaqoji məktəblərin “Riyazi analiz” kursunun “Ədədi sıralar” bölməsinin tədrisi prosesində kontrmisallardan istifadə imkanları. // Bakı Qızlar Universitetinin Elmi əsərləri. Cild12. №4. 2021(48) – s. 290-298
12. Məmmədov Ə.N. Riyazi analiz kursunun “Funksional ardıcılıqlar və funksional sıralar” bölməsində kontrmisallardan istifadə metodları // Azərbaycan Respublikası Təhsil İnstitutunun Elmi əsərləri. 2023, №4. – s. 218-224
13. Məmmədov Ə.N. Riyazi analiz kursunda çoxdəyişənli funksiyaların şərti və mütləq ekstremumlarının öyrənilməsində kontrmisallardan istifadə // Azərbaycan Respublikasının Təhsil İnstitutunun Elmi əsərləri. 2023, № 6. – s. 240-245

**Redaksiyaya daxil olub: 20.02.2026**